Refrences :

1) statics by : J.L. Meriam , L.G. kraige

2) statics by : Ferdinand p. Beer , E. Russel johnston

3) statics by : S. Timoshenko , D.H. yong

مباحث :

- مقدمه و کلیات

فصل اول : نیرو و مجموعه‌های نیرویی

فصل دوم : تعادل اجسام صلب

فصل سوم : تحلیل خرپاها و قاب‌ها

فصل چهارم : نیروهای داخلی در سازه‌های بحرانی استاتیکی

فصل پنجم : خواص هندسی سطوح

فصل ششم : تحلیل کابل‌ها

فصل هفتم : تئوری کار مجازی و کاربرد آن در حل مسائل تعادل

مقدمه و کلیات

علم مکانیک : مکانیک عبارت است از شاخه ای از فیزیک که به بررسی علم حرکت و سکون می پردازد.

مکانیک مهندسی : عبارت است از مجموعه ای از اصول و قواعد که از ریاضیات و فیزیک نشئت گرفته و بر جنبه های کاربردی آن تاکید دارد. (Engineering Mechanics)

علم مکانیک:
- ۱) جامدات
  - ۱) صلب (rigid) : تغییر شکل در اثر نیروی وارده ندارند ← سکون / حرکت
  - ۲) تغییر شکل پذیر (deformable)
- ۲) سیالات
  - ۱) مایعات ← هیدرولیک
  - ۲) گازها ← ترمودینامیک

۱) شاخه ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد صلب در حال سکون می پردازد گویند استاتیک.

۲) شاخه ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد صلب در حال حرکت می پردازد گویند دینامیک.

۳) شاخه ای از علم مکانیک که به بررسی اجسام جامد تغییر شکل پذیر می پردازد گویند مقاومت مصالح.

ضرورت فراگیری مکانیک مهندسی :

ایفای مسئولیت مهندسی:
- ۱) قدرت تجزیه و تحلیل مؤثر و خلاقیت در سطح عالی
- ۲) اصل های حرفه ای

ایفای مسئولیت مهندسی با استفاده از دو نکته گفته شده قابل انجام شدن است.

نقش ریاضیات :

انتظارات ما از دانشجو : ایجاد توانایی کشف حرفه‌ای :

۱) بر روشی منطقی و ساده

۲) با استفاده از چند اصل اساسی که قرارداد شده

مطالب پایه بر ۶ اصل استوار است :

۱ و ۲ و ۳ — قوانین نیوتن

٤ — قانون متوازی الاضلاع

۵ — اصل قابلیت انتقال

۶ — قانون گرانش نیوتن

— ساعات مراجعه : دوشنبه، چهارشنبه ساعت ۱۱ تا ۱۲ (دفتر یا آزمایشگاه بتن)

توزیع نمرات :

میان ترم	30%	۶ نمره
پایان ترم	50%	۱۰ نمره
کلاس حل تمرین	10%	۲ نمره
کوییز	10%	۲ نمره

فصل اول : نیرو و مجموعه نیروی — Force & Force Systems

تعریف نیرو : عبارتست از عمل یک جسم بر روی جسم دیگر. کنشی است که حرکت یا سکون جسم را تغییر می دهد و یا در جسم تغییر شکل ایجاد کند.
بنابراین نیرو یک کمیت برداری است.

تقسیم نیرو از نظر طرز اعمال:
- حجمی : به کل ذرات جسم وارد می شود (مانند ثقل)
- تماسی : از راه تماس وارد می شود.

اسم دیگر نیروی حجمی، القایی یا اثر از راه دور است. تمام نیروهای دیگر به جز ثقل تماسی هستند.

تقسیم از نظر نحوه تأثیر:
- خارجی : نیرویی است که از یک عامل خارجی وارد می شود
- داخلی : نیرویی است که توسط یک عامل خارجی در داخل جسم ایجاد می شود

نیروهای خارجی مسئولیت حرکت و سکون و نیروهای داخلی مسئولیت تغییر شکل جسم را به عهده دارند.

تقسیم از نظر نقطه اثر:
- متمرکز (Concentrated) : نقطه اثرش یک نقطه است.
- گسترده (Distributed) : نقطه اثرش یک سطح است (کف دست بر دیوار)

در واقعیت عموم نیروها گسترده هستند. اما در مطالعات مان معمولاً اکثر نیروها را در حالی که گسترده هستند متمرکز فرض می کنیم. اگر سطح تأثیر نیرو نسبت به سطح کل جسم ناچیز باشد نیرو را متمرکز فرض می کنیم.

اندازه نیرو

$\vec{F}$ اندازه $= |\vec{F}| = F$

سیستم‌های آحاد، تصمیم می‌گیرند کمیت‌ها (واحدها) با هم رابطه داشته باشند. مثلاً در $F = ma$ طول، جرم، ثانیه، نیرو با هم رابطه دارند. وظیفه‌اش آن است که کمیت‌ها را با هم سازگار کند.

کمیت	SI	MKS	اروپایی
طول	m	m	ft
زمان	sec	sec	sec
جرم	kg	kgm (جرم)	lbm / slug
نیرو	N	kgf	lbf

یک نیوتن در سیستم SI نیرویی است که وقتی به جسمی به جرم 1kg وارد می‌شود به آن شتاب $1\ m/s^2$ می‌دهد.

$$1\,N = 1\,kg \times 1\,m/s^2$$

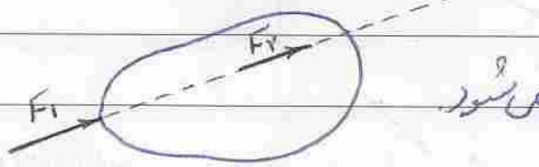
$$1\,kgf = 1\,kgm \times 9.81\,m/s^2 \implies 1\,kgf = 9.81\,N$$

یک کیلوگرم جرم جسمی است که اگر به آن یک کیلوگرم نیرو وارد شود شتاب ثقل بگیرد.

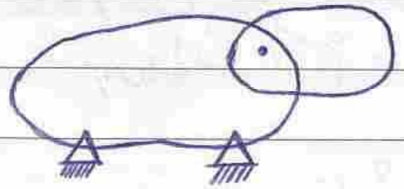
$$1\,lbf = 1\,lbm \times 32.2\,ft/sec^2$$

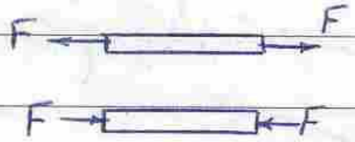
$$1\,lbf = 1\,slug \times 1\,ft/sec^2 \implies 32.2\,lbm = 1\,slug$$

اصل قابلیت انتقال نیرو: نیروهای اعمال شده بر جسم صلب می‌توانند بر روی راستای خود آزادانه جابجا شوند بدون اینکه بر روی اثرات خارجی نیروها روی جسم صلب تغییری ایجاد شود.

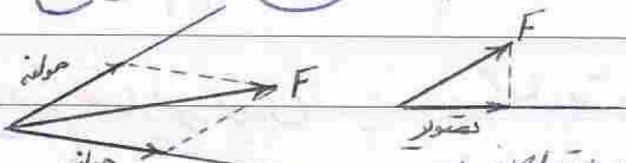


اگر F_1 حذف و F_2 اعمال شود هیچ تغییری در اثر ایجاد نمی‌شود.

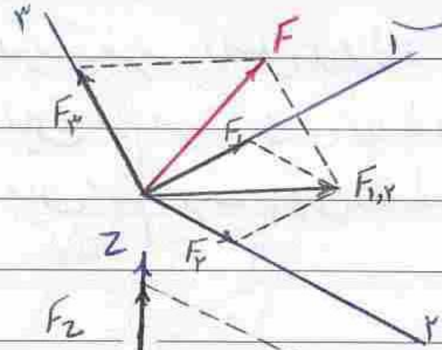


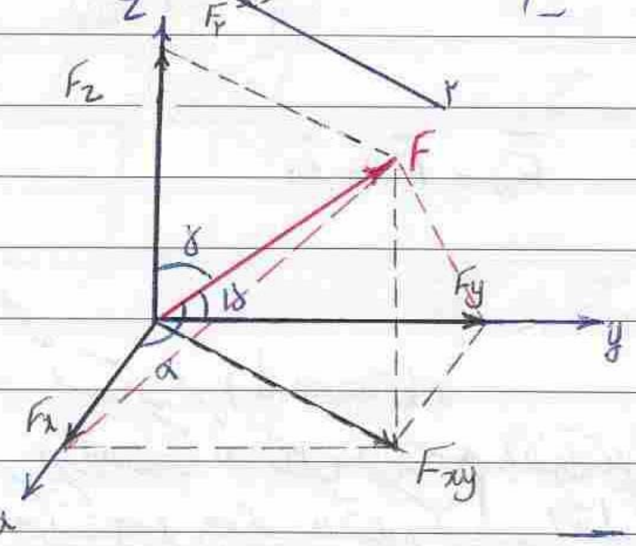


نمایش نیرو بر حسب مولفه‌های آن: مولفه عبارتست از بردارهای حاصل از تجزیه که مجموع آن‌ها بردار اصلی خواهد بود.



برای مولفه بندی نیروی F بر روی سه امتداد ۱، ۲ و ۳ در فضا ابتدا صفحه‌ای از امتداد ۱ و ۲ عبور می‌دهیم. مولفه‌های F را بر روی صفحه و امتداد ۳ رسم می‌کنیم و به ترتیب $F_{1,2}$ و F_3 می‌نامیم. آنگاه مولفه‌های F_{12} را بر روی امتداد ۱ و ۲ رسم می‌کنیم. حال سه مولفه F_1 و F_2 و F_3 را داریم.



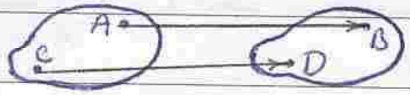


$$F_x = |F| \cos\alpha = |F| . l$$
$$F_y = |F| \cos\beta = |F| . m$$
$$F_z = |F| \cos\gamma = |F| . n$$
$$m^2 + n^2 + l^2 = 1$$

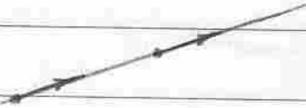
$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$
$$\vec{F} = |F| \cos\alpha \hat{i} + |F| \cos\beta \hat{j} + |F| \cos\gamma \hat{k}$$

انواع بردارها:

۱) بردار آزاد: محدود به یک راستای خاص در فضا نیست

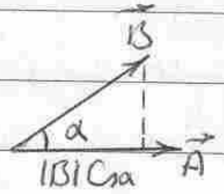


۲) بردار لغزنده: برداری است که محدود به یک نقطه اثر خاص در فضا نیست و در فضای تواند جابه‌جا شوند (مثل نیروی اعمال شده به جسم صلب بدون تغییر در اثرات خارجی نیروها. نه داخلی. همیشه بردارها لغزنده‌اند)



۳) بردار بسته: دقیقاً در راستا و نقطه اثر خود اعمال می‌شود و تغییر در آن باعث می‌شود. (نیروهای وارد بر اجسام غیر صلب)

یافتن تصویر نیرو بر روی یک امتداد خاص با استفاده از ضرب داخلی بردارها:

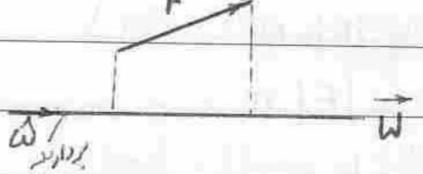


تعریف ضرب داخلی بردارها: $\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$

بیان دوم ضرب داخلی بردارها:

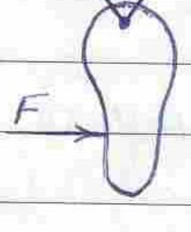
بیان سوم ضرب داخلی بردارها: $\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x i+A_y j+A_z k)\cdot(B_x i+B_y j+B_z k)$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$



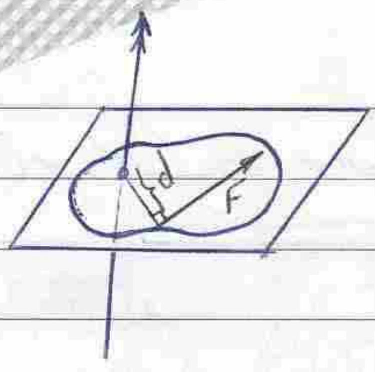
$F_w=\vec{F}\cdot\hat{w}$ $\vec{F}_w=(\vec{F}\cdot\hat{w})\,\hat{w}$

گشتاور (Moment):

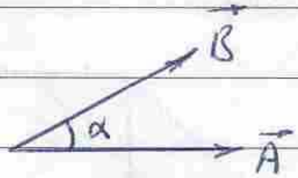


نیرو علاوه بر اینکه تمایل دارد جسم را در راستای خود جابجا کند تمایل به چرخش حول هر محور یا امتدادی که نیرو را قطع نکند و با آن موازی نیز نباشد ایجاد می‌کند. این تمایل به چرخش را گشتاور گویند.

* گشتاور برداری آزاد است.



$$|M| = F.d$$
$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$$



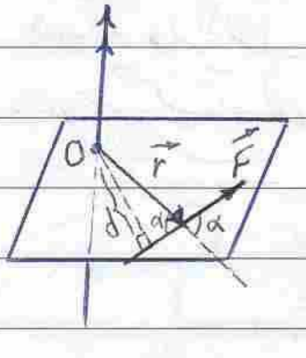
ضرب خارجی بردارها:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} : \begin{cases} |C| = |A||B| \sin\alpha \\ \text{عمود بر صفحه دو بردار = امتداد} \\ \text{طبق قانون دست راست = جهت} \end{cases}$$

اگر چهار انگشت دست راست از بردار اول به سمت بردار دوم در جهت زاویه کوچکتر بچرخد جهت انگشت شست جهت بردار حاصلضرب است.

در تعریف ضرب خارجی ساین تعریف شده است.

بیان گشتاور با استفاده از مفهوم ضرب خارجی بردارها:



$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{cases} \text{مقدار} = |r||F| \sin\alpha = F.d \\ \text{عمود بر صفحه دو بردار = امتداد} \\ \text{طبق قانون دست راست = جهت} \end{cases} = \vec{M}_O$$

$$\Longrightarrow \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

r: برداری است که ابتدایش مرکز گشتاور و انتهایش در نقطه‌ای بر روی بردار $\vec{F}$ است.

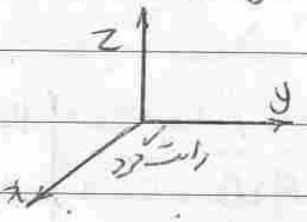
که بردار موقعیت

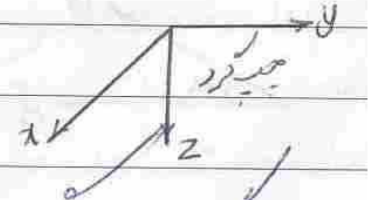
> ذره را تا نبود همت عالی حافظ   طالب چشمه خورشید درخشان نشود

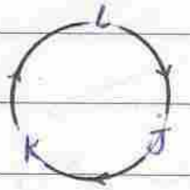
بیان دوم ضرب خارجی:

$$A \times B = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$





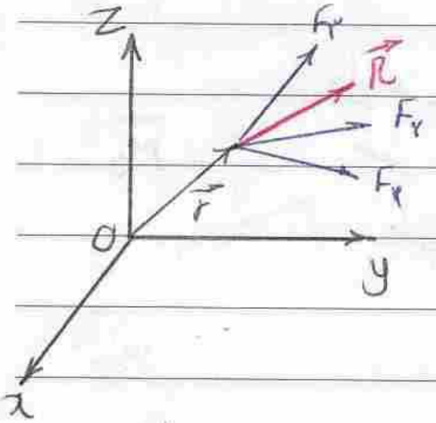


در دستگاه راستگرد: $i \times j = k$ ، $j \times k = i$ و $k \times i = j$

$$\rightarrow A \times B = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

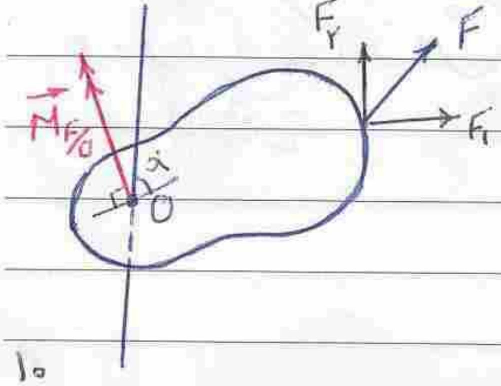
$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

قضیه وارینیون (Varignon's Theorem): گشتاور یک نیرو نسبت به یک نقطه برابر است با جمع جبری گشتاورهای مولفه‌های نیرو نسبت به همان نقطه.



$$\vec{M}_{R/O} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots)$$
$$= \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 + \dots$$
$$= \vec{M}_{F_1/O} + \vec{M}_{F_2/O} + \vec{M}_{F_3/O} + \dots$$

گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور دلخواه در فضا:

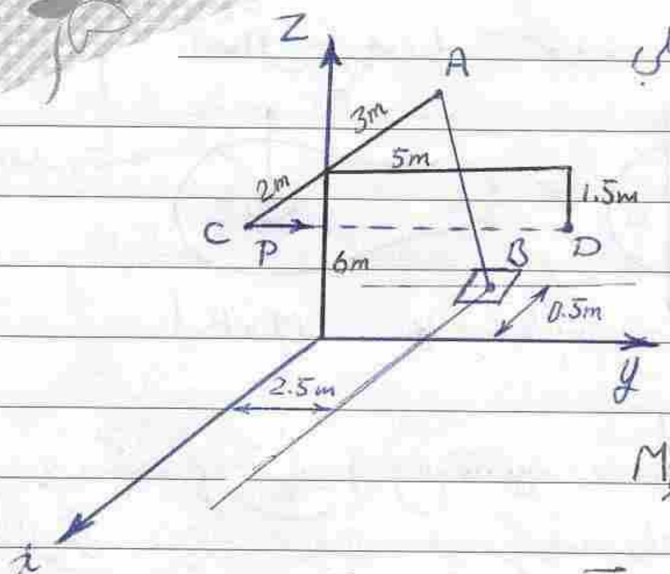


$$\vec{M}_{F/O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_{F/\omega} = (r \times F)\cdot\hat{\omega}$$

$$\vec{M}_{F/\omega} = [(r \times F)\cdot\hat{\omega}]\,\hat{\omega}$$

مثال: عضو شکسته نشان داده شده توسط کابلی در نقطه B مهار شده است و تحت اثر نیروی P قرار دارد. گشتاور نیروی P را حول محور AB می‌یابید. $P = 8kN$



حل:

$$M_{P/AB} = \vec{r} \times \vec{p} \cdot \vec{\lambda}_{AB} = \vec{M}_{P/A} \cdot \vec{\lambda}_{AB}$$

$$\vec{P} = |P| \cdot \vec{\lambda}_{CD} = |\vec{P}| \cdot \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = 8 \times \frac{-2\hat{i} + 5\hat{j} - 1.5\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 1.5^2}}$$

$$= -2.86\hat{i} + 7.14\hat{j} - 2.14\hat{k}$$

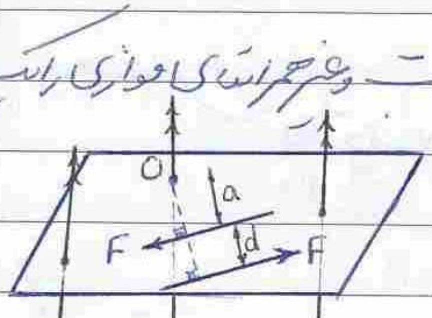
$$\vec{M}_{P/A} = \vec{r}_{AC} \times \vec{P} = (5\hat{i}) \times (-2.86\hat{i} + 7.14\hat{j} - 2.14\hat{k})$$

$$= 35.7\hat{k} + 10.7\hat{j}$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{2.5\hat{i} + 2.5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{2.5^2 + 2.5^2 + 6^2}} = 0.36\hat{i} + 0.36\hat{j} - 0.86\hat{k}$$

$$M_{P/AB} = -26.85 \ \frac{kN}{m}$$

زوج نیرو: گشتاور حاصل از دو نیروی مساوی با مختلف الجهت و غیر هم‌راستای موازی را زوج نیرو یا Couple می‌گویند.

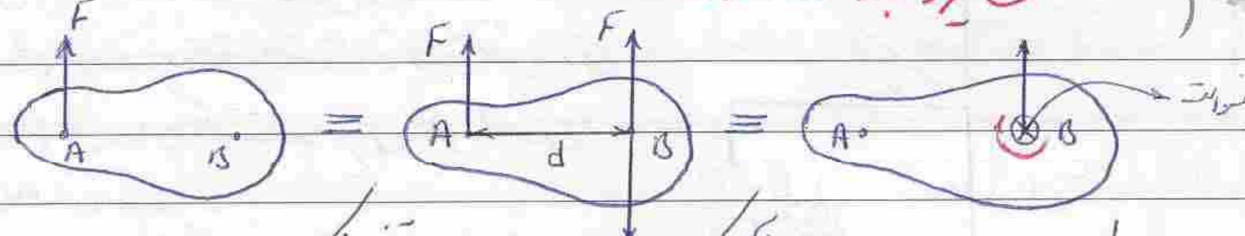


$$M_O = F(a+d) - F.a = F.d$$

* نقطه O را هر جای از صفحه بگیریم M_O تغییر نمی‌کند و فقط به مقدار نیرو و فاصله بین دو نیرو دارد.

گشتاور حاصل از یک زوج نیرو همواره بردار آزاد است. زوج نیرو را کوپل هم می‌گویند.

انتقال نیرو به موازات خودش



$M = F.d$

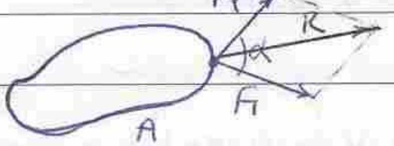
* به شرط آنکه رفتار خارجی جسم صلب تغییر نکند

برآیند مجموعه‌های نیرویی (Resultant of force systems): عبارتست از ساده‌ترین شکل ترکیب نیرویی که می‌تواند جایگزین مجموعه نیرویی اصلی شود بدون آنکه در رفتار خارجی جسم صلب تغییری ایجاد شود.

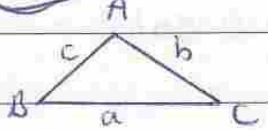
۱) مجموعه‌های نیرویی دوبعدی یا صفحه‌ای (Two-dimensional force systems):

الف) متقارب:

۱) دو برداری:

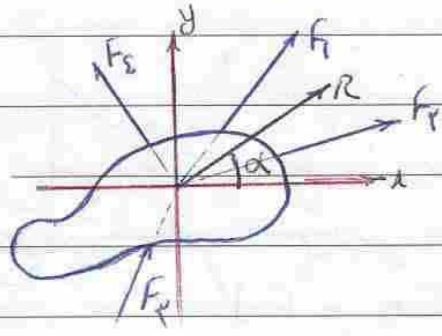


$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

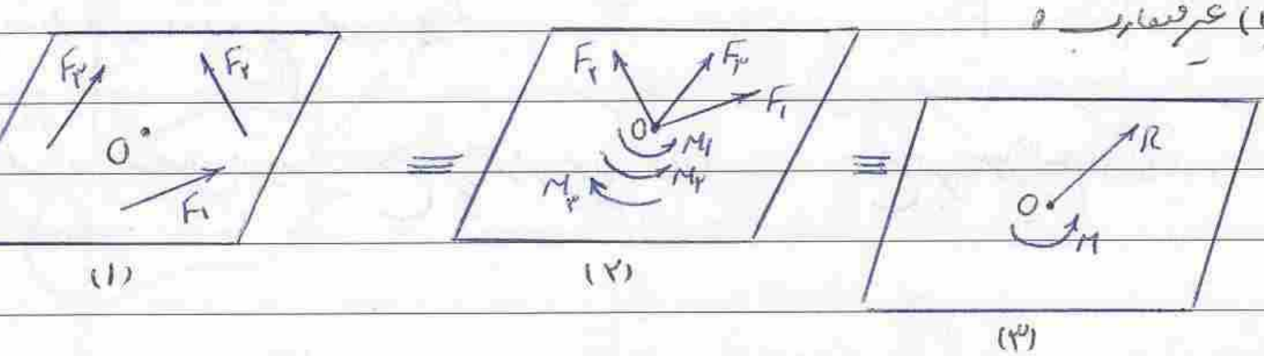
۲) چند برداری:



$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$$

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ R_y = \sum F_{iy} \end{cases} \qquad \alpha = tg^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

ب) غیر متقارب:



حالت ها در صفحه ۳ :

۱) اگر نقطه O را جوری انتخاب کنیم R تغییر نمی کند ولی M می تواند تغییر کند.

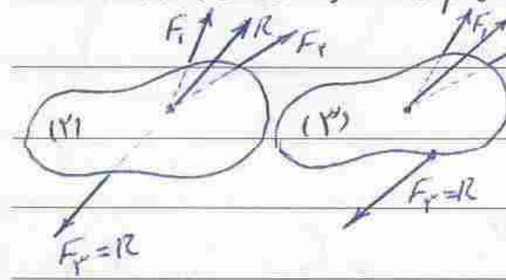
$1)\ R \neq 0 \ , \ M = 0$ یا $\neq 0$

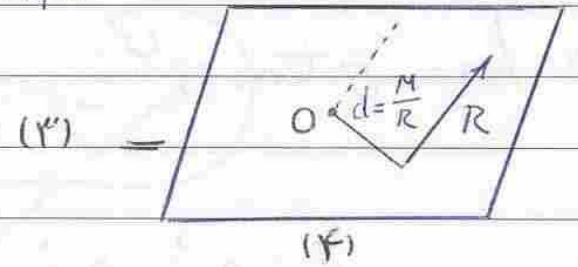
۲) هیچ حرکتی در جسم تولید نمی شود (حالت تعادل) →

$2)\ R = 0 \ , \ M = 0$

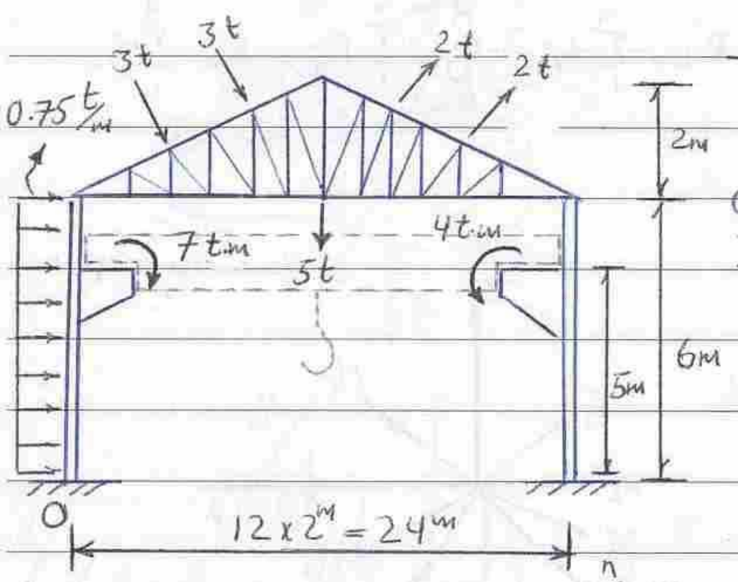
۳) در این حالت M به نقطه O بستگی ندارد و برای تمام نقاط O، M ثابت است. این همان زوج نیرو است.

$3)\ R = 0 \ , \ M \neq 0$

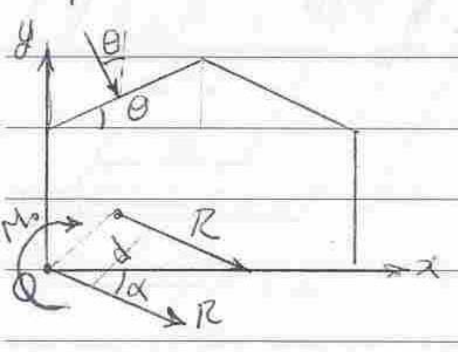




مثال: قاب یک سوله صنعتی مطابق شکل تحت اثر نیروهای نشان داده قرار دارد. نیروهای عامل بر سطح شیروانی عمودند. مقدار و محل برآیند این مجموعه را یافته و موقعیت آن را روی شکل نسبت به نقطه O مشخص نمایید.



$$\theta = tg^{-1}\frac{2}{12} = 9.46^{\circ}$$



$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0.75 \times 6 + 2 \times 3 \times \sin 9.46 + 2 \times 2 \times \sin 9.46 = 6.14t$$

$$R_y = -2 \times 3 \times \cos 9.46^{\circ} + 2 \times 2 \cos 9.46 - 5 = 6.97t$$

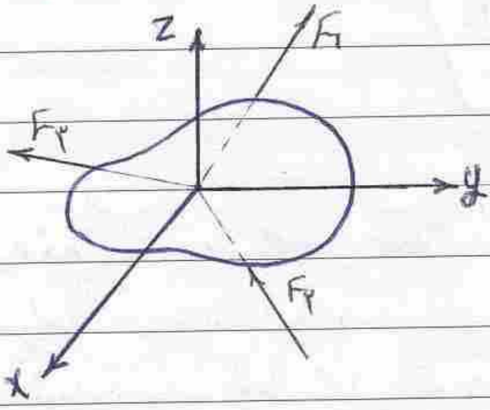
$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 9.29t$$

$\alpha = tg^{-1}\frac{R_y}{R_x} =$ [redacted] $^{\circ} -48.6$

$$\stackrel{+}{\curvearrowright} \sum M_O = +0.75\times6\times3 + 3\times\sin 9.46\left(6+\frac{2}{3}\right) + 3\times\cos 9.46\times4 + 3\times\sin 9.46\times\left(6+\frac{4}{3}\right) + 3\cos 9.46\times8 + 2\sin 9.46\left(6+\frac{4}{3}\right) - 2\cos 9.46^\circ\times16 + 2\sin 9.46\times\left(6+\frac{2}{3}\right) - 2\cos 9.46\times20 + 5\times12 + 7 - 4 = +52.5\ t.m$$

$$d = \frac{M_0}{R} = 5.65\ m$$

8 (Three-dimentional force systems) ۲) مجموعه نیروهای ۳ بعدی یا فضایی

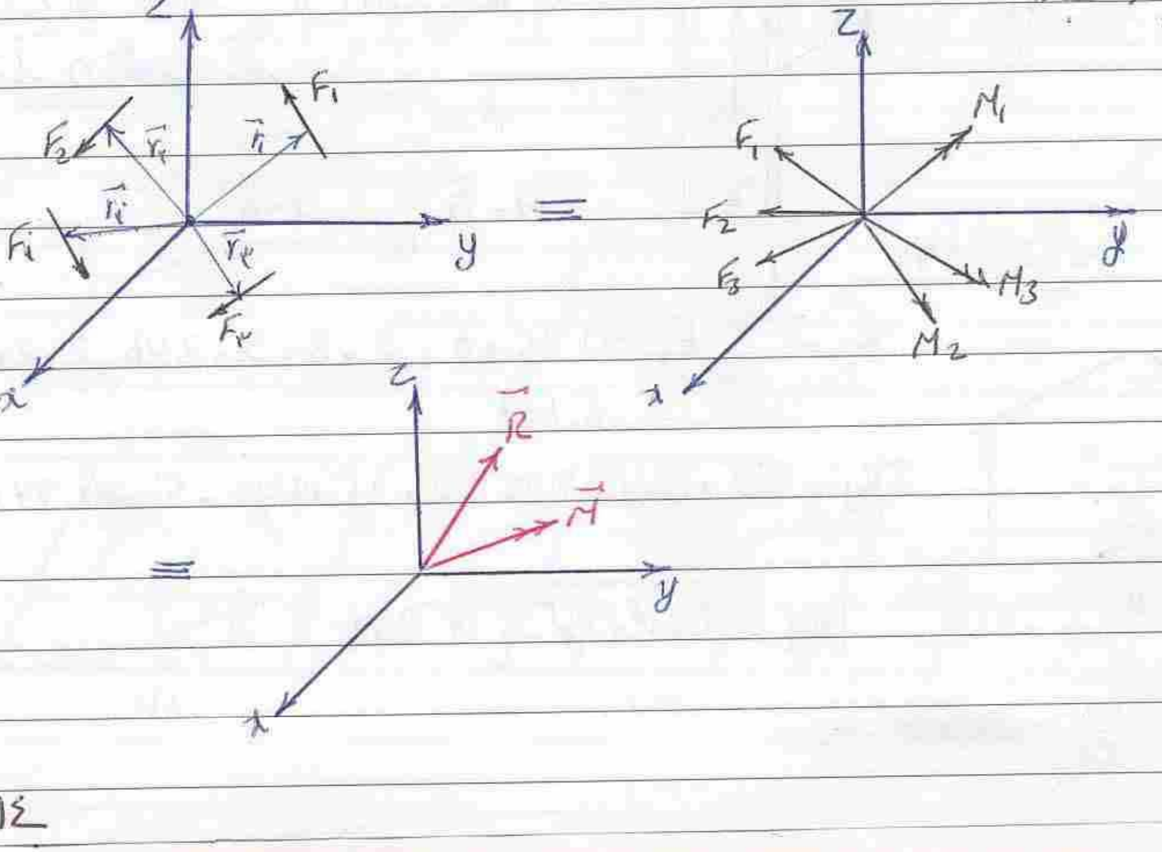


الف) متقارب:

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

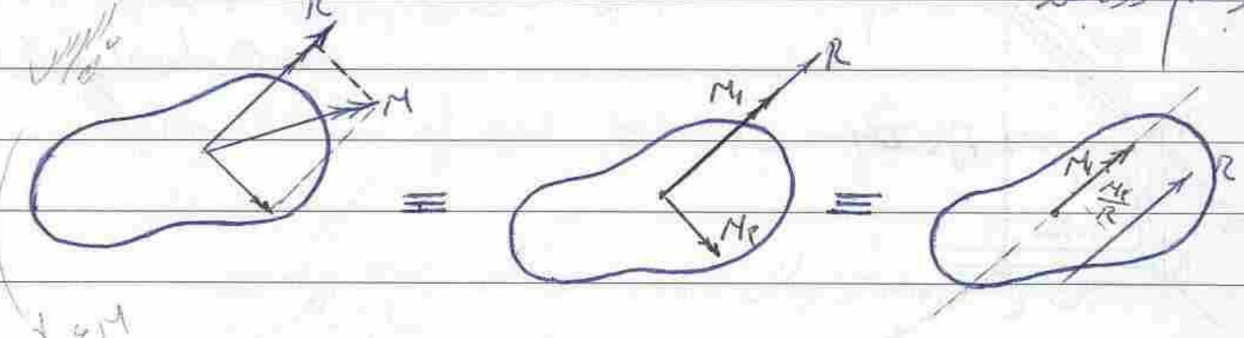
$$R_x = \sum_{i}^{n} F_{ix} \quad R_y = \sum_{i}^{n} F_{iy} \quad R_z = \sum_{i}^{n} F_{iz}$$

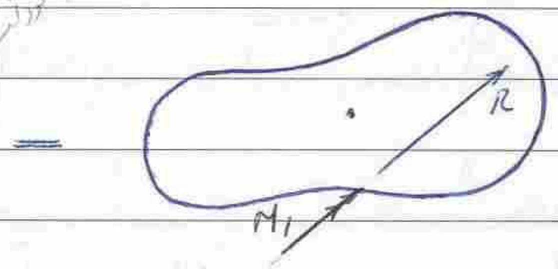
ب) غیر متقارب:



$$\vec{M} = \sum_{1}^{n} \vec{M_i} = \sum_{1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

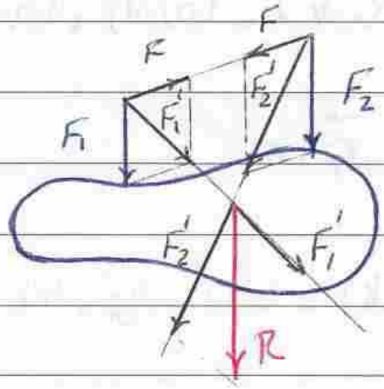
در حالت کلی به هیچ وجه نمی‌توان R و M را به یک R تنها تبدیل کرد به غیر از زمانی که R و M بر هم عمود باشند.

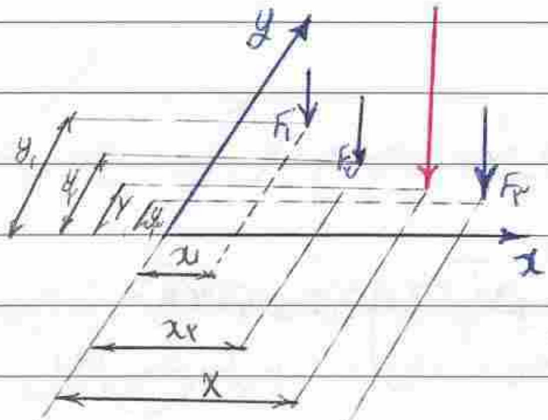




برآیند اجباری (پیچ گوشتی وار)

برآیند نیروهای موازی



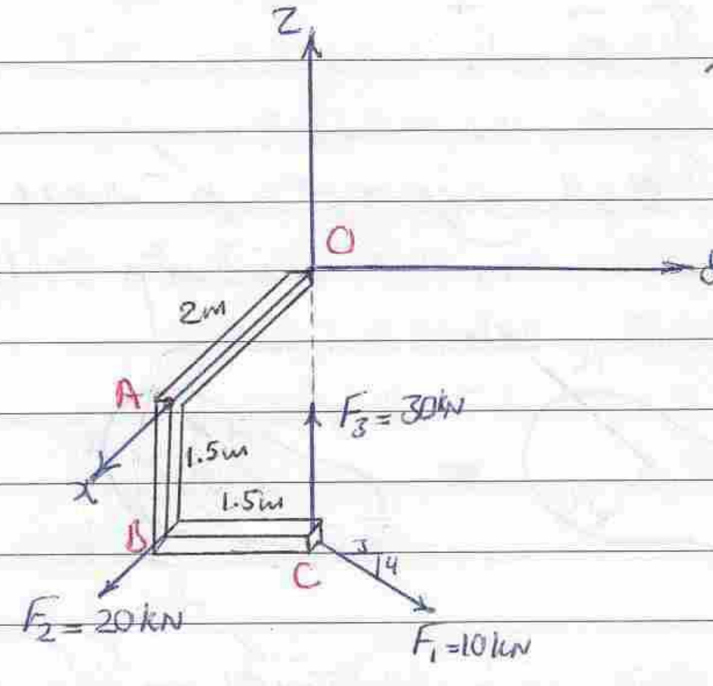


$$|R| = \sum_{1}^{n} F_i$$

$$\begin{cases} R \cdot \bar{X} = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots \\ R \cdot \bar{Y} = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \cdots \end{cases}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i x_i}{R}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum F_i y_i}{R}$$



مثال: عضو نشان داده شده تحت اثر نیروهای F_1 و F_2 و F_3 مفروض است. F_1 در صفحه‌ای به موازات صفحه yz و F_2 به موازات محور x است. برآیند این مجموعه نیرو را در نقطه O بیابید.

$$F_1 = +6\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$F_2 = 20\,\hat{i}$$

$$F_3 = 30 \times \frac{\overrightarrow{CO}}{|CO|} = 30 \times \frac{-2\hat{i} - 1.5\hat{j} + 1.5\hat{k}}{\sqrt{2.25 + 2.25 + 4}} = -20.7\,\hat{i} - 15.5\,\hat{j} + 15.5\,\hat{k}$$

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OC} \qquad \vec{r}_2 = -1.5\hat{k} + 2\hat{i} \qquad \vec{r}_3 = 0$$

$$M_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (2\hat{i} + 1.5\hat{j} - 1.5\hat{k}) \times (6\hat{j} - 8\hat{k}) = -3\hat{i} + 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$M_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (-1.5\hat{k})(20\hat{i}) = -30\hat{j}$$

$$M_3 = r_3 \times F_3 = 0$$

$$\sum M = -3\hat{i} - 14\hat{j} + 12\hat{k} \qquad \sum F = -0.7\hat{i} - 9.46\hat{j} + 7.46\hat{k}$$

> اگر رفتگر خیابان هستید طوری خیابان را جارو کنید که گویی میکل آنژ نقاشی می‌کند یا بتهوون موسیقی می‌سازد یا شکسپیر شعر می‌گوید. خیابان را چنان جارو کنید که ساکنان آسمان‌ها و زمین وقتی آن را می‌بینند درنگ کرده و بگویند این کار رفتگر ارجمندیست که کارش را خوب انجام داده است. (Martin Loter King)

فصل دوم: تعادل اجسام صلب (Equilibrium of rigid bodies):

جسم صلب: جسمی است که در اثر نیروهای وارده فاصله نقاطش هیچ تغییری نکند.

مجموعه مکانیکی: عبارتست از یک جسم یا مجموعه‌ای از اجسام که بتوان آن‌ها را از سایر اجسام محیط مجزا کرد.

اجزای تشکیل دهنده یک مجموعه مکانیکی می‌توانند تنها یا چند عضو باشند، صلب یا غیر صلب باشند و یا جامد، سیال یا گاز باشند.

دیاگرام آزاد مجموعه مکانیکی (Free body diagram):

- نیرو
  - خارجی
    1. عمل action
    2. عکس العمل reaction
  - داخلی

نیروهای عمل: نیروهایی هستند که توسط عوامل خارجی بر جسم وارد می‌شوند و در جسم تمایل به حرکت ایجاد می‌کنند.

نیروهای عکس العمل: نیروهایی هستند که توسط زمین و سایر اجسام تکیه‌گاهی بر جسم وارد می‌شوند و مخالفت با بروز حرکت در جسم می‌نمایند و جسم را به باقی ماندن در مکان اولیه مجبور می‌کنند. به نیروهای عکس العمل نیروهای مقید کننده گویند.

دیاگرام آزاد یک مجموعه مکانیکی: عبارتست از مجموعه یا جسم منفک شده از کلیه اجسام پیرامونی و هر تماس آن که توسط یک نمودار نشان داده شود.

مراحل رسم دیاگرام آزاد:

۱) انتخاب جسم یا مجموعه مکانیکی که باید از محیط پیرامونی انفکاک یابد.

۲) رسم حدود خارجی جسم انتخاب شده.

۳) نشان دادن کلیه نیروهای خارجی شامل عمل و عکس العمل (معلوم و مجهول) بر روی جسم *

نکته ۱: نیروهای معلوم تماماً توسط بردارهایی که مقدار، امتداد و جهت آن ها معلوم است نشان داده می شود

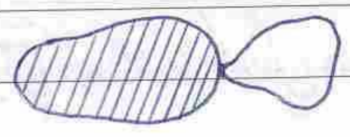
نکته ۲: نیروهای مجهول توسط بردارهایی که مقدار آن ها مجهول است نشان داده می شود. اگر امتداد نیرو نیز مجهول باشد توسط یک زاویه مجهول یا با استفاده از مولفه های کارتزین نشان داده می شود. اگر جهت نیرو نیز مجهول باشد در این صورت دلخواه فرض می شود، پس از انجام محاسبات در صورت مثبت بودن جواب فرض فوق تایید می شود، در غیر اینصورت جهت واقعی نیرو خلاف جهت فرض شده است.

۴) نشان دادن ابعاد، فواصل و محورهای مختصات در صورت لزوم.

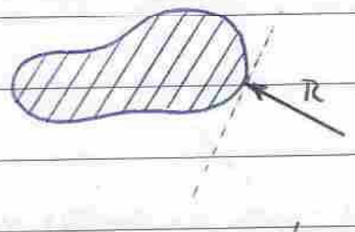
۱) تعادل اجسام صلب در صفحه (دو بعدی):

الف) شناخت عکس العمل ها:

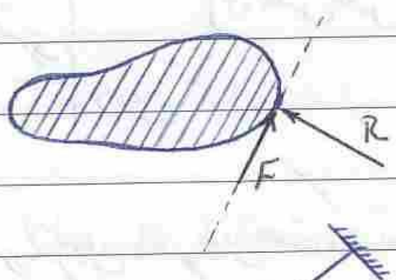
(۱) تماس دو جسم:



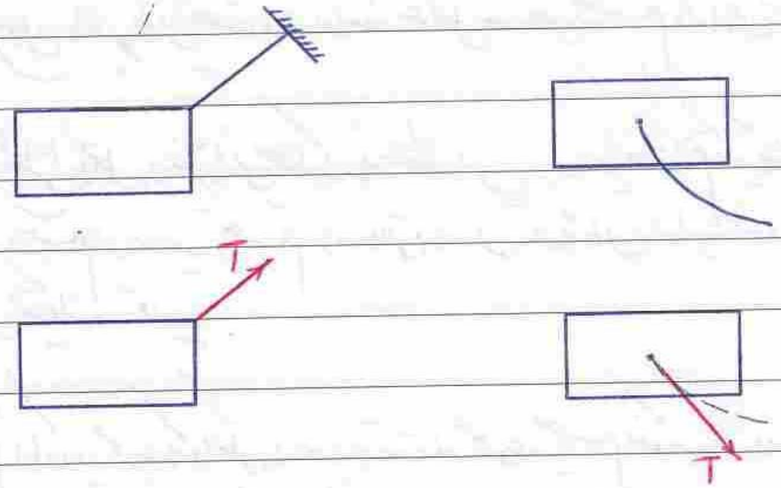
محل تماس سطوح صاف باشد:



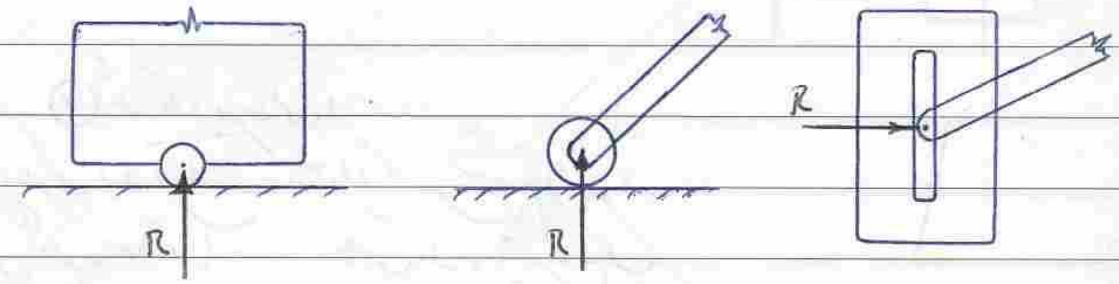
محل تماس سطوح زبر باشد:

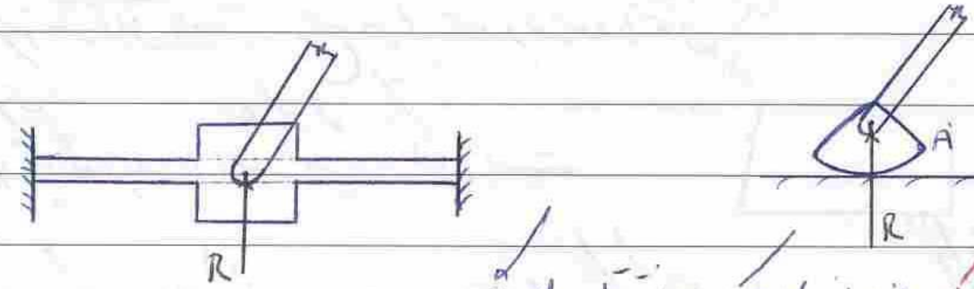


(۲) اثر کابل بر جسم:



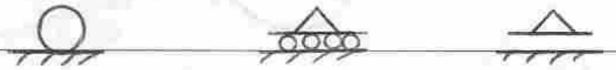
۳) تکیه‌گاه غلتکی (Roller Supports) :



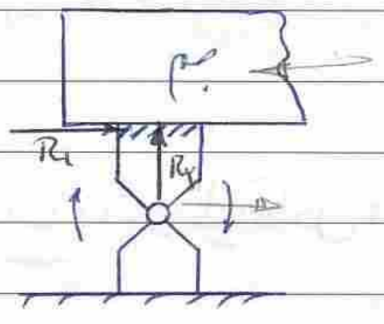


تا زمانی که A به زمین برسد تکیه‌گاه غلتکی است.

* تکیه‌گاه غلتکی فقط جلوی یکی از مولفه‌های حرکت انتقالی را می‌گیرد.
* عمود بر هر مولفه‌ای که آزاد می‌باشد تکیه‌گاه غلتکی (عکس‌العمل) وجود دارد.

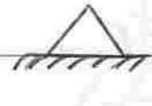


علامت اختصاری تکیه‌گاه غلتکی :

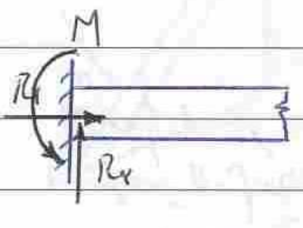


۴) تکیه‌گاه مفصلی (Pinned Support) :

از حرکت‌های انتقالی فقط جلوی دو تا از مولفه‌ها را می‌گیرد و فقط حرکت چرخشی دارد.

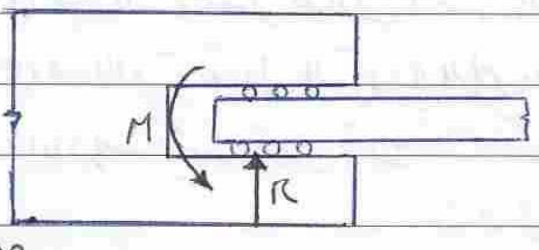


علامت اختصاری تکیه‌گاه مفصلی :

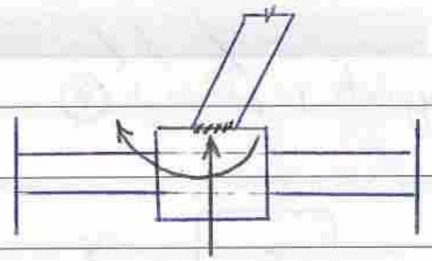


۵) تکیه‌گاه گیردار (Fixed Support) :

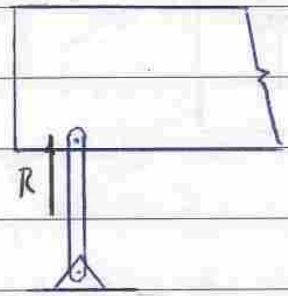
همه مولفه‌ها را محدود می‌کند و هیچ یک از سه نوع حرکت را ندارد. (تکیه‌گاه ۳ مجهولی)



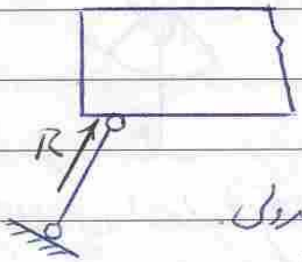
۶) تکیه‌گاه گیردار دو مجهولی :



۷) تکیه‌گاه پاندولی:



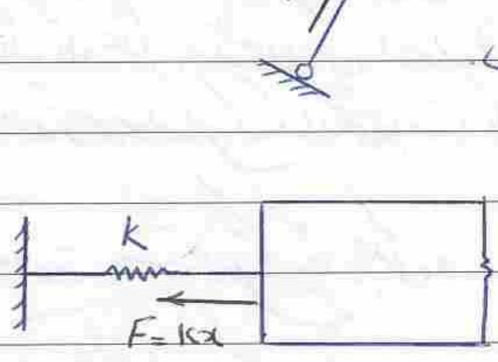
میله پاندولی میله‌ای است که معمولاً محوری مستقیم دارد دو انتهای آن مفصل است. وزن آن ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است و هیچ نیروی عمود بر محورش را تحمل نمی‌کند.



* تکیه‌گاه پاندولی شبیه تکیه‌گاه غلتکی است.

* نیروی عکس‌العمل نیرویی است در راستای محور تکیه‌گاه پاندولی.

۸) تکیه‌گاه فنری (الاستیک):



ب) شرایط تعادل:

تعادل: $R=0$, $M=0$

شرایط تعادل ⟵
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$
(حول z)

ویژگی‌ها:

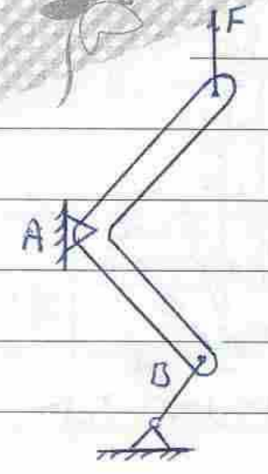
۱) شرایط لازم و کافی تعادل: برقراری سه رابطه بالا شرط کافی تعادل است.

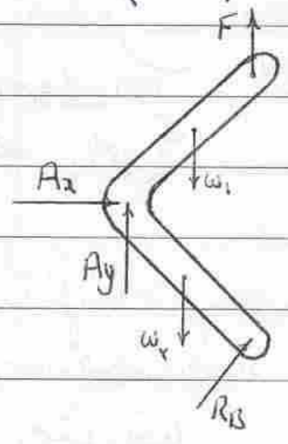
۲) معادلات مستقل تعادل: سه رابطه بالا از هم مستقلند.

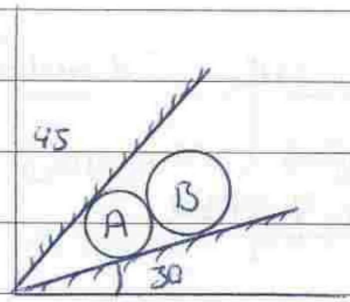
۳) معادلات تعادل استاتیکی: الزامی ندارد جسم ثابت باشد (حرکت سرعت ثابت دارد)

اما ما در استاتیک تعادل را در حالت سکون در نظر می‌گیریم، به همین علت تعادل استاتیکی را در نظر می‌گیریم.

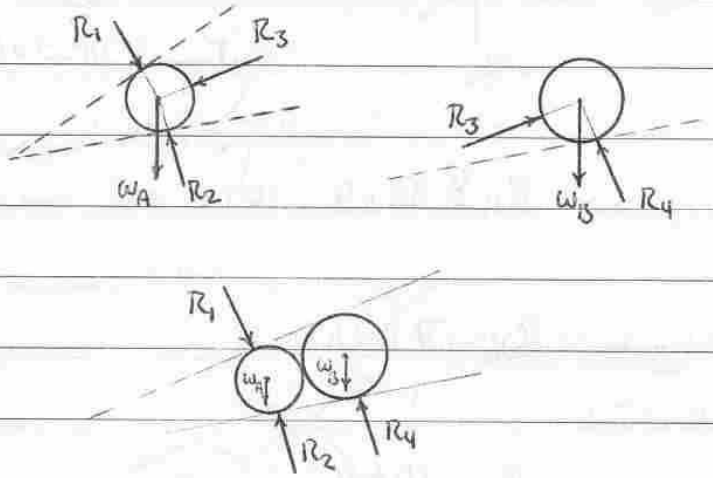
مثال ها: مطلوبست رسم دیاگرام های آزاد جسم نشان داده شده.

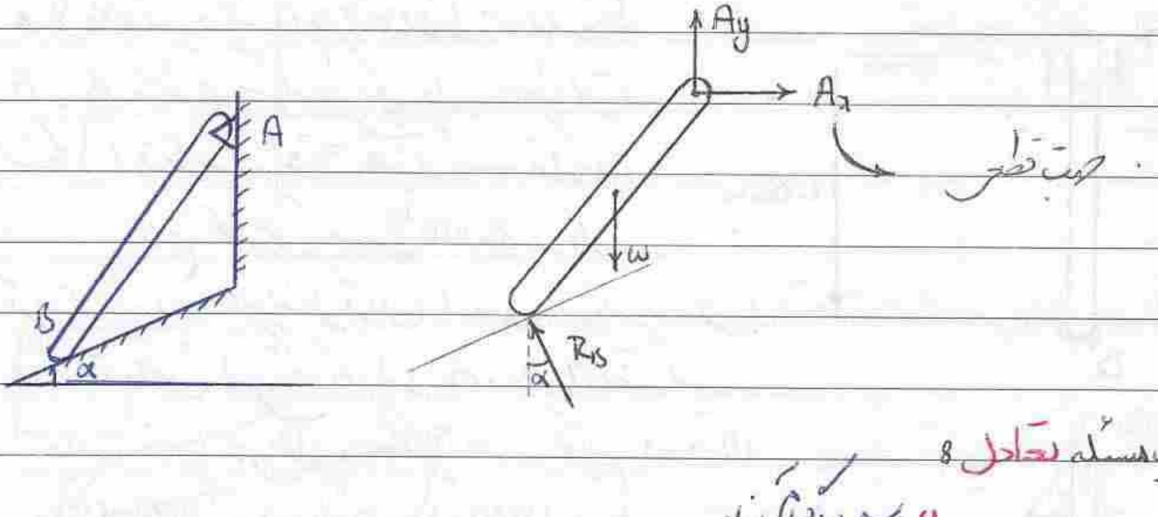






(سطوح صاف هستند)



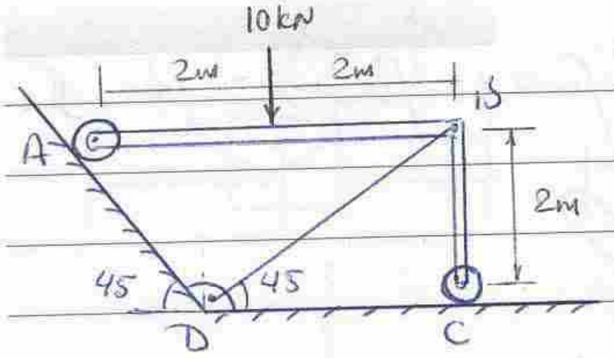


مراحل حل یک مسئله تعادل:

۱) رسم دیاگرام آزاد

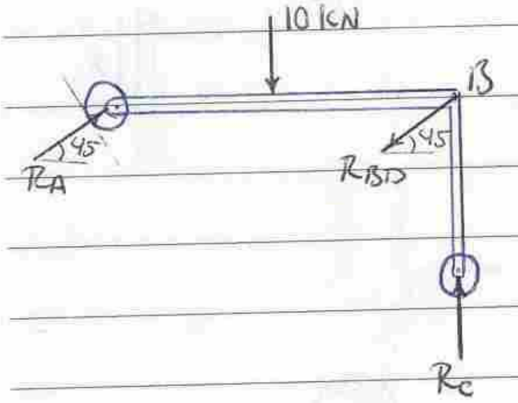
۲) مقایسه تعداد مجهولات با تعداد معادلات مستقل تعادل

۳) اعمال معادلات تعادل و یافتن مجهولات



مثال (۱): عضو شکسته‌ی ABC که در صفحه می‌باشد توسط تکیه‌گاه‌های مفصلی A و C و میله‌ی پاندولی BD نگه داشته شده است. عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را به دست آورید.

حل: مراحل حل مسئله: ۱) رسم دیاگرام آزاد



۲) مقایسه‌ی تعداد مجهولات با تعداد معادلات مستقل تعادل

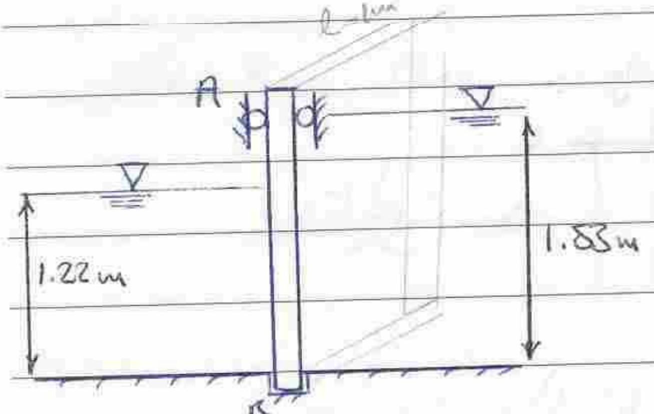
۳) اعمال معادلات تعادل و یافتن مجهولات

تعداد معادلات ← ۳تا   تعداد مجهولات ← ۳تا

$$\overset{+}{\curvearrowright}\ \sum M_B = 0 \rightarrow R_A \sin 45 \times 4 - 10 \times 2 = 0 \Rightarrow R_A = 7.07\,kN$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_B = 7.07\,kN$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_C = 10\,kN$$

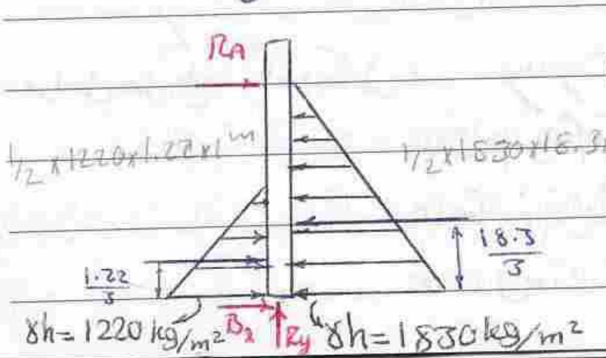


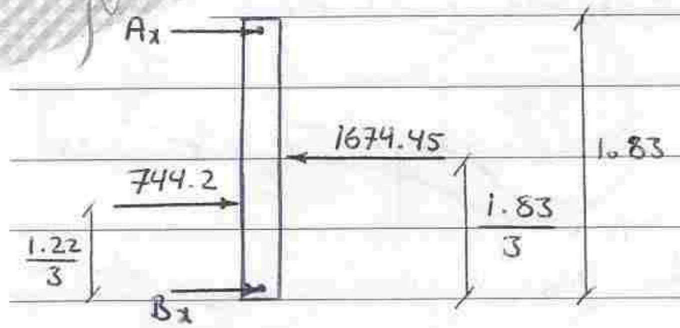
مثال (۲): یک دریچه‌ی قائم و بسته در طول خود در نقاط A و B به طور سراسری تکیه دارد و مطابق شکل از دو طرف تحت فشار آب قرار گرفته است. وزن مخصوص آب $\gamma = 1000\,\frac{kg}{m^3}$ در نظر گرفته می‌شود. با صرف‌نظر کردن از وزن دریچه شدت واکنش‌های تکیه‌گاه‌های A و B را بیابید.

محاسبات را برای طول واحد دریچه حساب می‌کنیم $(l = 1m)$

$$\frac{1}{2} \times 1830 \times 1.83 \times (1m) = 1674.45\,kg$$

$$\frac{1}{2} \times 1220 \times 1.22 \times (1m) = 744.2\,kg$$





$\overset{+}{\curvearrowleft}$

$$\sum M_B = 0$$

$$\rightarrow 1674.45 \times \frac{1.83}{3} - 744.2 \times \frac{1.22}{3} - A_x \times 1.83 = 0$$

$$\Rightarrow A_x = 392.77$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 744.2 + B_x + 392.77 - 1674.45 = 0$$

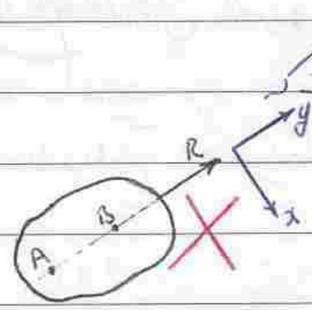
$$\Rightarrow B_x = 537.48$$

ج) بیان های مختلف تعادل در صفحه:

بیان اول : $\left\{ \sum F_x = 0 ,\ \sum F_y = 0 ,\ \sum M = 0 \right.$ شرایط لازم و کافی تعادل

بیان دوم : $\left\{ \sum F_x = 0 ,\ \sum M_A = 0 ,\ \sum M_B = 0 \right.$

بیان دوم تعادل به شرطی برقرار است که AB عمود بر x نباشد.

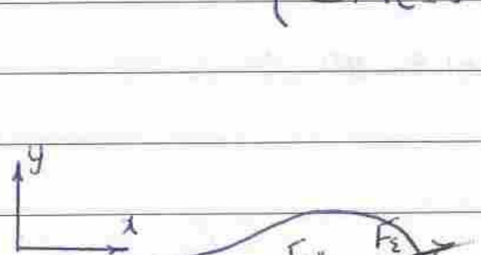


بیان سوم : $\left\{ \sum M_A = 0 ,\ \sum M_B = 0 ,\ \sum M_C = 0 \right.$

بیان سوم تعادل به شرطی برقرار است که A و B و C در یک راستا نباشند.

د) حالات خاص معادلات تعادل:

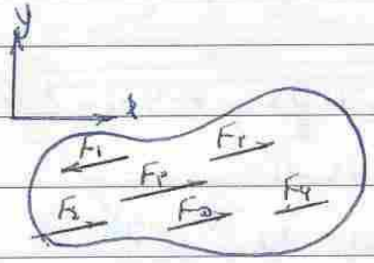
1) وقتی که همه نیروها در یک راستا باشند.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \cos\alpha (F_1 + F_2 + F_4 - F_3) = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 0$$

$\sum F_y = 0 \rightarrow$ (همین مستقل نیست) به درد نمی‌خورد $\quad \sum M_O = 0$ به درد می‌خورد

پس تنها یک معادله بدردمان می‌خورد.

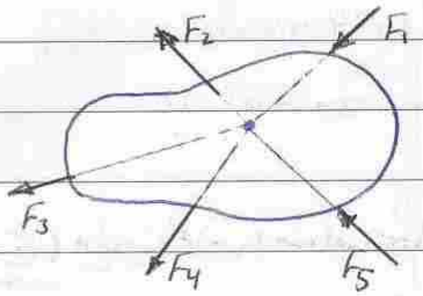


۲) وقتی همه نیروها با هم موازی باشند.

$\sum F_x = 0$

$\sum M_x = 0$

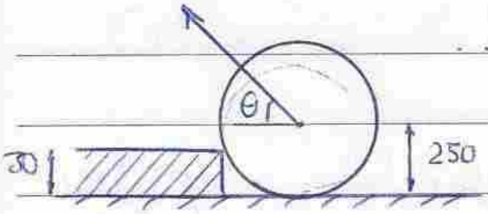
$\sum F_y = 0$ داشته است نه $\sum F_x = 0$ پس بدرد نمی‌خورد.



۳) وقتی همه نیروها در یک نقطه متقارب باشند.

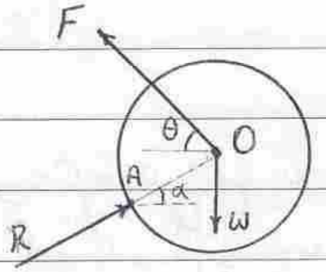
$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$



مثال ۵) چرخی به وزن 100 N و به قطر 500 mm مفروض است. در صورتیکه $\theta = 30°$ باشد نیروی لازم F برای بالا بردن چرخ از مانعی به ارتفاع 30 mm را حساب کنید.

حل ۵) در این حالت دو مجهول و دو معادله داریم. (در یک نقطه متقاربند)



$\alpha = \sin^{-1}\frac{22}{25} \rightarrow \alpha = 61.6°$

$\sum F_x = 0 \rightarrow$

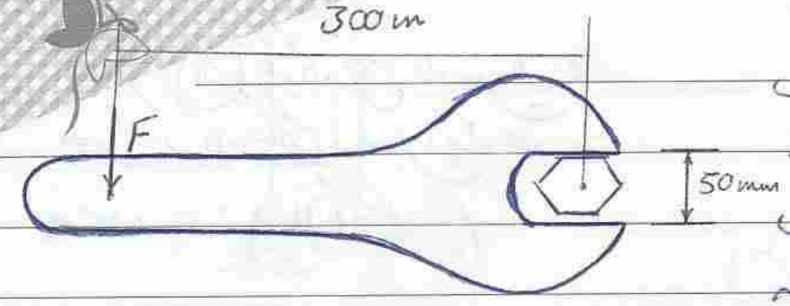
$\rightarrow F\cos 30 - R\cos 61.6 = 0$

$\sum F_y = 0$

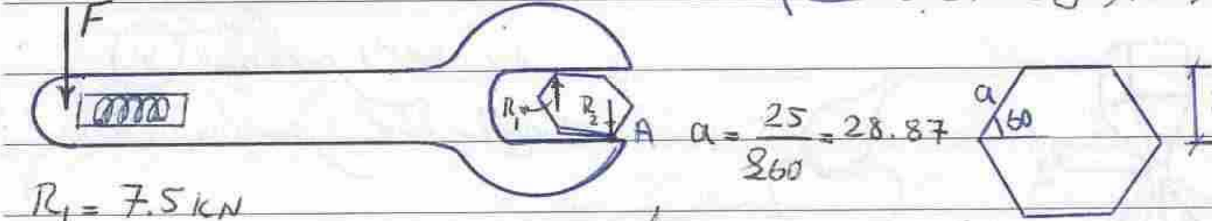
$\rightarrow F\sin 30 + R\sin 61.6 - 100 = 0$

$\Rightarrow F = 47.6\ N \ , \ R = 86.62$

در نقطه A اصطکاک عمود بر R وجود ندارد چون $\sum M_O = 0$ پس $f_s . d = 0 \Rightarrow f_s = 0$ پس



مثال: سطوح داخلی یک کلید آچار به شکل نشان داده شده که از فولاد سخت ساخته شده صیقلی می‌باشد. با توجه به شکل تعیین کنید چون مهره شش گوش می‌تواند بدون لطمه و تغییر شکل حداکثر نیروی متمرکز برابر 7.5 kN را از طرف آچار نشان داده شده تحمل نماید مطلوب است ماکزیمم نیروی F که می‌توان به فاصله 300 mm اعمال کرد (فرض کنید در بین مهره و آچار مقداری لقی وجود دارد)



$a = \frac{25}{\sin 60} = 28.87$

$R_1 = 7.5\ kN$

$F + R_2 = R_1$

چون فقط F را خواسته پس مرکز دوران را نقطه اعمال R_2 می‌گیریم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -R_1 \times 28.87 + F\left(300 + \frac{28.87}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F = 0.688\ kN$$

۲) تعادل اجسام صلب در فضا (سه بعدی):

الف) شناخت عکس العمل‌ها:

① تماس سطوح اجسام ← ۱) سطح صاف ۲) سطح زبر

② اثر کابل

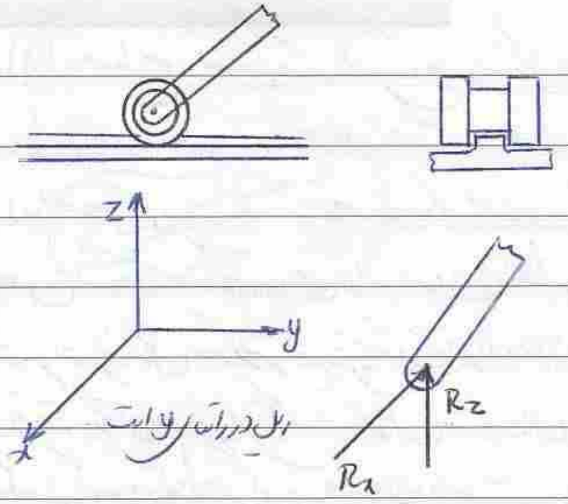
③ تکیه‌گاه کروی

④ تکیه‌گاه بازویی

۵) تکیه گاه چرخ دار روی ریل :

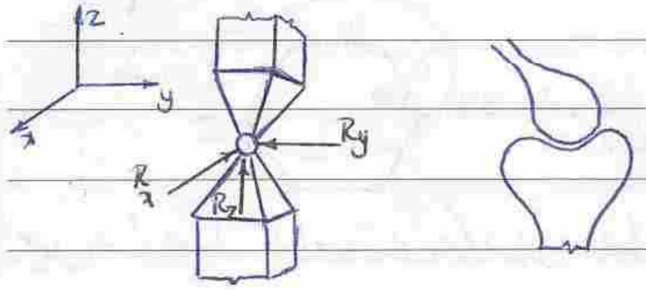
همان تکیه گاه غلتکی دوبعدی در سه بعد است.

* حول x و z دوران کوچکی داریم.

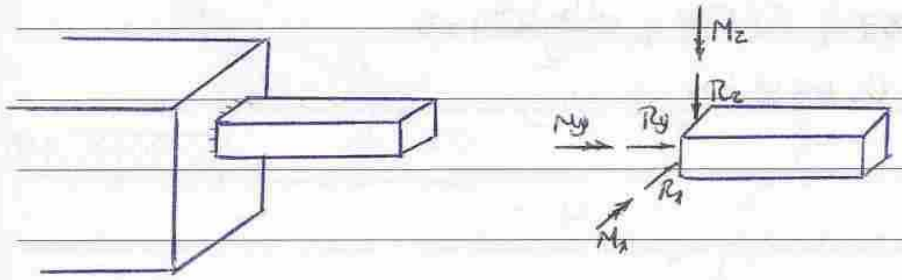


۶) تکیه گاه گوی (مفصلی) :

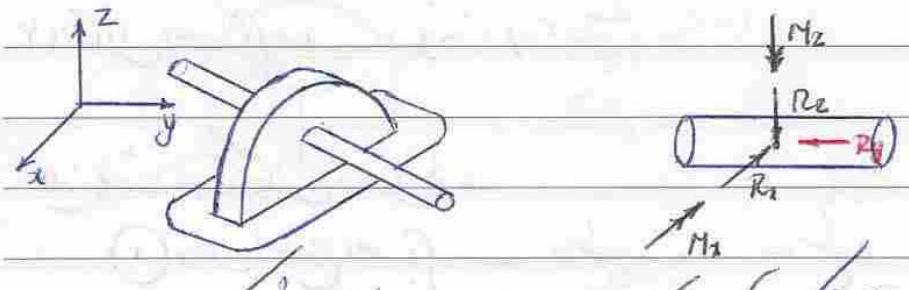
نام دیگر آن کاسه ای یا کاسه و ساچمه است



۷) تکیه گاه گیردار :



۸) یاتاقان ها :



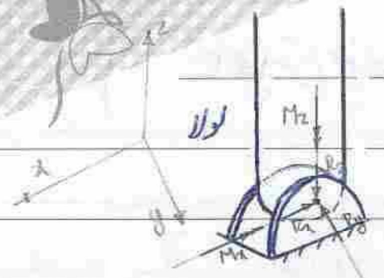
یاتاقان ها دو نوع اند ۱) یاتاقانی که جلوی حرکت در جهت y را می گیرد که Ry (←Ry) را هم داریم. (قطر دو طرف تفاوت دارد)

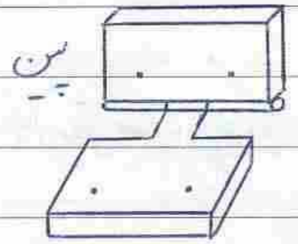
۲) یاتاقانی که جلوی حرکت در راستای y وجود ندارد.

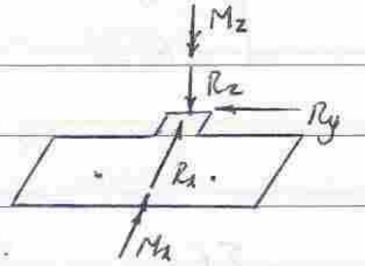
* پس یاتاقان ها بسته به نوعشان ۴ یا ۵ عکس العمل دارند.

۹) لولاها یا پین ها :

عمل تکیه‌گاه مفصلی در مقابل ۲ نیرو را .

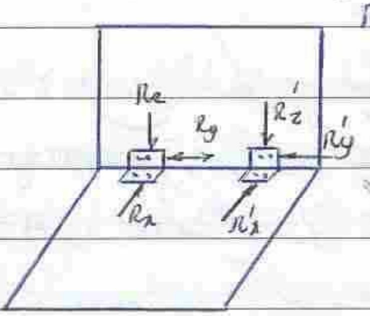






* در دو یاتاقان یا دو پین (دو لولا) چون M_z و M_x را خنثی می‌کنند می‌توانیم از گشتاورهای عکس‌العمل صرف‌نظر کنیم و با ۶ معادله ۶ مجهول مسئله را حل کنیم. علت این است که R_x و R_z کوپلی ایجاد می‌کنند که دیگر احتیاجی به M_x و M_z نیست.

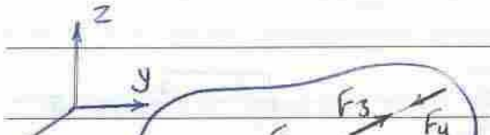
* در کل لولا یا پین یا یاتاقان باید چهار مجهول به کار رود.



ب) شرایط تعادل :

$$M=0,\ R=0 \rightarrow \begin{cases} \sum F_x=0 & \sum M_x=0 \\ \sum F_y=0 & \sum M_y=0 \\ \sum F_z=0 & \sum M_z=0 \end{cases}$$

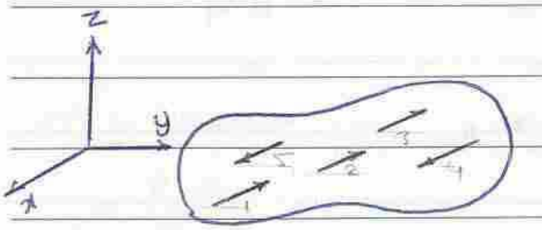
ج) حالات خاص معادلات تعادل :



۱) وقتی همه نیروها در یک راستا باشند .

$$\sum F_x=0$$

تنها یک معادله به درد می‌خورد .

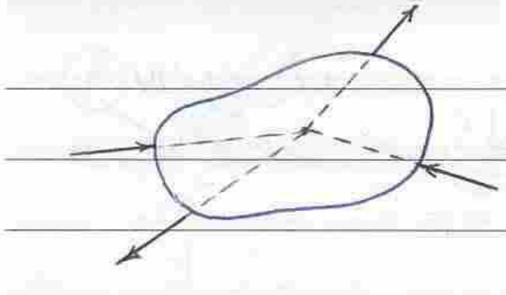


۲) وقتی همه نیروها با هم موازی باشند .

$$\sum F_x=0 \qquad \sum M_y=0 \qquad \sum M_z=0$$

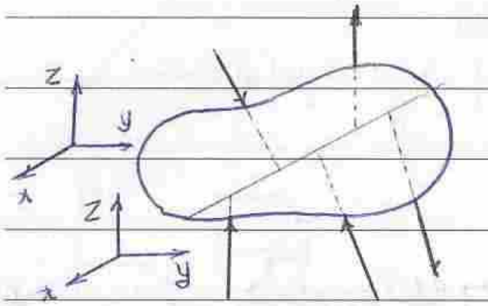
فقط سه معادله به درد بخور است .

۳) وقتی همه نیروها در یک نقطه متقارب باشند.

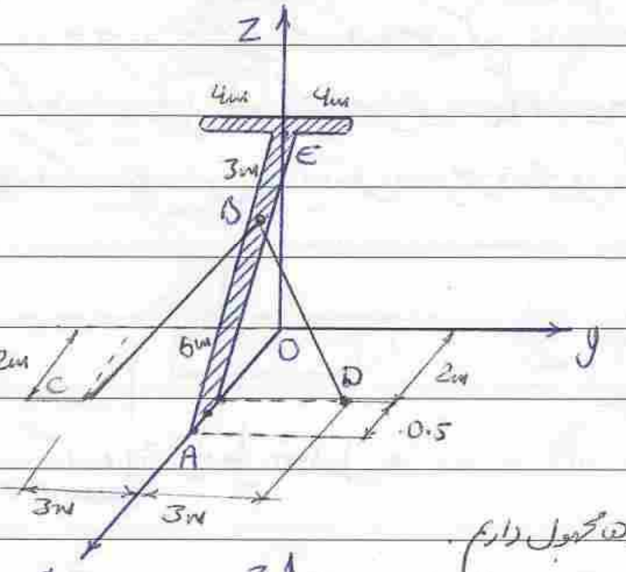


$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases}$$

۴) وقتی همه نیروها در یک خط متقارب باشند.

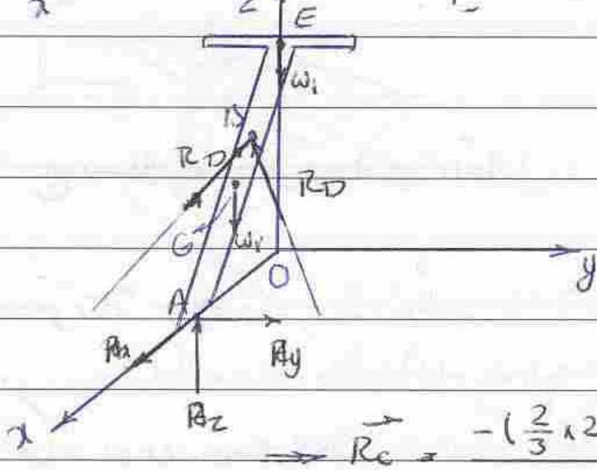


$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum M_y=0\\ \sum M_z=0\end{cases}$$



مثال: یک بازوی صلبی متشکل از دو میله جوش شده به جرم 100 kg در هر متر طول توسط یک تکیه‌گاه گوی در نقطه A و دو عدد میله یا بندهای BC و BD نگاه داشته شده است. مطلوب است محاسبه عکس‌العمل نقطه A و نیروهای عکس‌العمل در میله‌ها یا بندها.

حل: حالت ۶ حالت خاص چهارم است پس شش معادله و شش مجهول داریم.



$$\sum \vec{M}_A=0$$

$$\vec{r}_{AB}\times(\vec{R}_C+\vec{R}_D)+\vec{r}_{AE}\times \vec{w}_1+\vec{r}_{AG}\times \vec{w}_2=0$$

$$\vec{R}_C=|R_C|\frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}\qquad OE=\sqrt{9^2-2.5^2}=8.65$$

$$\Rightarrow \vec{R}_C=\frac{-(\frac{2}{3}\times 2.5-0.5)i+3j+(\frac{2}{3}\times 8.65)k}{|\vec{CB}|}|\vec{R}_C|$$

$$\vec{R}_D=|R_D|\frac{\vec{DB}}{|\vec{DB}|}\Rightarrow \vec{R}_D=|R_D|\frac{-1.17i-3j+5.77k}{|\vec{DB}|}=|R_D|\frac{-1.17i-3j+5.77k}{6.6}$$

$$R_C=\frac{-1.164\ 3j+5.766}{6.59}\times|\vec{R}_C|$$

$\vec{r}_{AE} = -2.5i + 8.65\hat{k}$ $\quad \vec{r}_{AB} = \frac{2}{3}\vec{r}_{AE}$ $\quad \vec{r}_{AG} = \frac{1}{2}(r_{AE})$

$r_{AB} = -1.66i + 5.77k$

$r_{AG} = -1.25i + 4.325k$

$\omega_1 = -[(8 \times 100) \times 9.8]\hat{k} = -7840\vec{k}$

$\omega_2 = -[(9 \times 100) \times 9.8]\hat{k} = -8820\vec{k}$

$R_D = 37.4 \times \frac{1}{6.6}(-1.17i - 3j + 5.77k) = -6.62i - 16.98j + 32.65k$ (5.06)

$R_C = 5.67(-1.16i + 3j + 5.764) = -6.57i + 17.01j + 32.65k$

$(-2.61R_C + 2.6R_D)\hat{i} + (2.41R_C + 0.41R_D - 30.66)\hat{j} + (-0.75R_C + 0.75R_D)\hat{k} = $

$R_C = R_D = 37.4$ ton

$\sum\vec{F} = 0 \Rightarrow A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\hat{k} + \vec{R}_C + \vec{R}_D + \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0$

$A_x i + A_y j + A_z k$

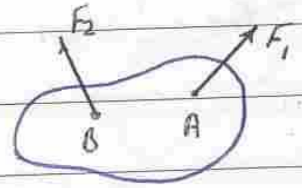
$+ i(-13.19) + j(0.5) + k(-10594.71) = 0$

$A_x = 13.19$

$A_y = 0.5$ $\quad \longrightarrow A = 10594.7$

$A_z = 10594.71$

تعادل جسم دو نیرویی :



جسم دو نیرویی جسمی است که در فقط دو نقطه دو نیرو به آن اعمال شود (مجهول یا غیر مجهول) .

$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ F_2 از A می‌گذرد

$\sum M_B = 0 \Rightarrow$ F_1 از B می‌گذرد

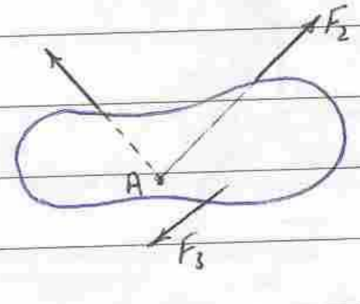
در نتیجه F_1 و F_2 هم راستا هستند.

یعنی اگر جسم دو نیرویی بخواهد در حال تعادل باشد باید حتماً هم راستا باشند.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$

نتیجه نهایی : شرط تعادل یک جسم دو نیرویی این است که دو نیرو هم اندازه، هم راستا و مختلف الجهت باشند.

تعادل جسم سه نیرویی :



فرض کنیم سه نیروی F_1 و F_2 و F_3 در یک صفحه واقعند به جسم وارد شود.

$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ F_3 از A می‌گذرد

نتیجه نهایی : شرط تعادل جسم سه نیرویی این است که امتداد آنها در یک نقطه متقارب باشند.

پایداری و ناپایداری مجموعه‌های مکانیکی صلب (اجسام صلب) :

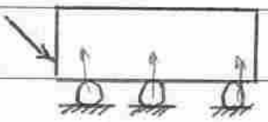
درجات آزادی : تعداد کمیت‌های مستقل از یکدیگر یا به تعبیر دیگر مختصات مستقلی هستند که موقعیت یک جسم را نسبت به سایر اجسام محیط پیرامون به طور کامل و دقیق مشخص کند.

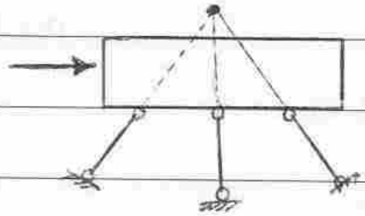
یک جسم صلب در صفحه دارای ۳ درجه آزادی است و در فضا دارای ۶ درجه آزادی است.

جسم پایدار : جسمی است که کلیه درجات آزادی آن محدود شده باشد.

اگر یک جسم در صفحه بخواهیم پایدار داشته باشیم باید سه قید (تکیه‌گاه) فراهم شود. در فضا شش قید تکیه‌گاهی باید فراهم شود (حداقل). این تعداد شرط لازم است و کافی نیست.

* نتیجه نهائی: شرط لازم و کافی جهت تأمین پایداری جسم صلب در صفحه تأمین حداقل سه قید تکیه‌گاهی و در فضا حداقل شش قید تکیه‌گاهی است که نه با هم موازی و نه متقارب باشند. (منظور از موازی نبودن در حالت سه بعدی اعم از آن است که کلیه قیدها تماماً با هم موازی باشند یا در صفحات موازی با هم باشند. و منظور از عدم تقارب در فضا آنست که در یک نقطه متقارب نباشند و در صفحه)





ناپایداری:

۱) کلی: ناشی از کمبود تکیه‌گاه

۲) هندسی: ناشی از نامناسب بودن طرز قرار گرفتن تکیه‌گاه‌ها

ناپایداری را که از آن بعد از کمی حرکت پایداری ایجاد می‌شود ناپایداری جزئی گوییم.

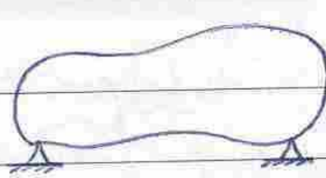
معین و نامعین احجام صلب:

اگر تعداد معادلات مستقل تعادل برای حل مسئله کافی باشد مجموعه معین (قابل حل) است و در غیر این صورت نامعین (غیر قابل حل) است.

مثال: تفاضل بین مجهولات و تعداد معادلات تعادل = n درجه نامعینی

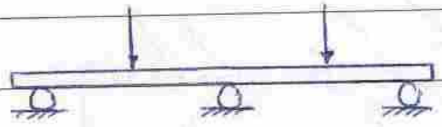
۳ معادله، ۴ مجهول $n = 1$

* علت نامعین شدن اضافه داشتن تکیه‌گاه است.



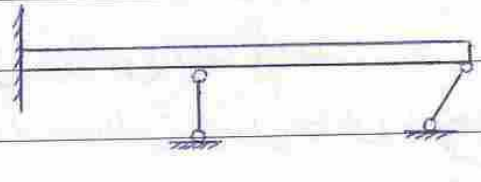
$n=1$

$n=2$

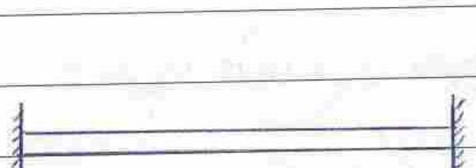


$n=1$

جسم از نظر کلی ناپایدار است ولی در این حالت خاص پایدار است. پس اجازه داریم درجه معینی و نامعینی حساب کنیم. ۲ تا معادله می توان نوشت در حالیکه ۳ مجهول داریم



$n=2$



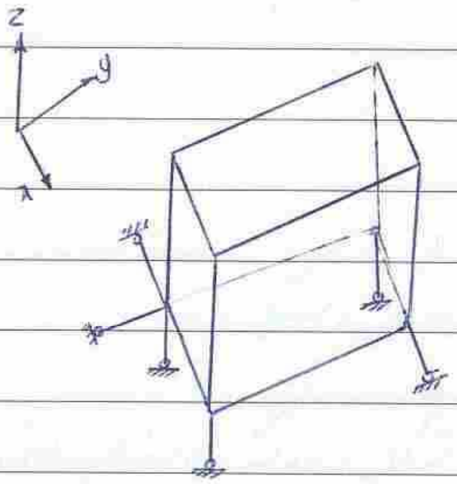
$n=3$

اگر جسمی ناپایدار باشد دیگر درجه معینی و نامعینی آن را حساب نمی کنیم.

* هنگامی که ناپایداری هندسی ناشی از موازی بودن تکیه‌گاه است در یک حالت خاص هم در حالت پایدار است وقتی که برآیند مجموعه نیروهای موازی نیروهای تکیه‌گاهی باشد.

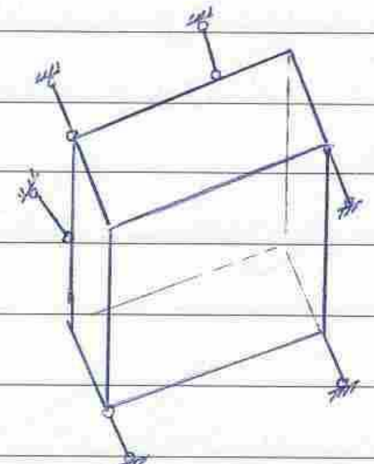
* هنگامی که ناپایداری هندسی ناشی از متقارب بودن نیروهای تکیه‌گاهی در یک حالت خاص هم در حالت پایدار است و آن وقتی است که برآیند مجموعه نیروها نیز از نقطه تقارب بگذرد.

بیان دیگر معین و نامعین: مجموعه‌های جسمی که بر روی قیدهای بیش از حد اقل لازم برای تامین پایداری تکیه کرده‌اند نامعین بوده و درجه نامعینی آن معادل تعداد قیدهای مازاد است. در غیر اینصورت معین است.

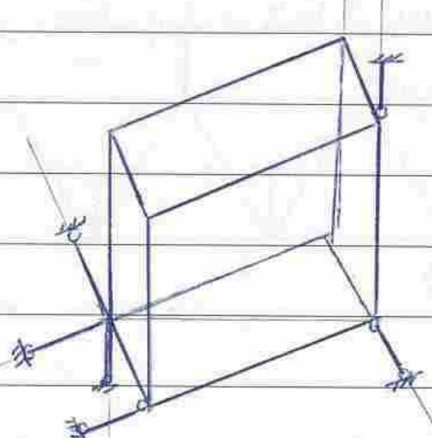


مثال: اجسام نشان داده شده را از جهت پایداری و ناپایداری مقایسه کنید.

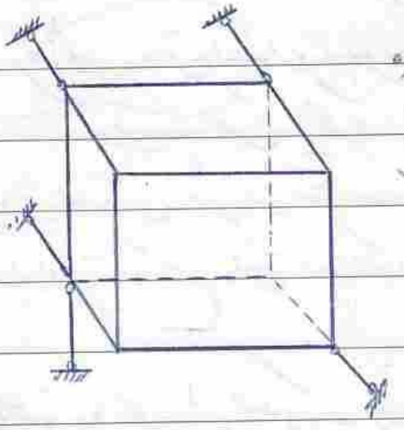
پایدار است. چون شش مولفه تکیه‌گاهی نه موازی اند و نه متقارب



شکل ناپایدار است. چون ۶ مولفه موازی اند. اما در حالتی که برآیند نیروهای وارده موازی نیروهای تکیه‌گاهی باشد پایدار می‌گردد.



ناپایدار است. چون نیروهای تکیه‌گاهی از یک خط می‌گذرند. ولی در حالت خاص که برآیند نیروهای وارده هم از همین خط بگذرد پایدار می‌گردد.



ناپایدار است چون دو صفحه موازی ایجاد کرده است. اما اگر برآیند نیروهای وارده هم موازی صفحه نیروهای تکیه‌گاهی باشد سیستم پایدار می‌گردد.

گر گنه می‌کنی در شب آدینه بکن   تا از صدرنشینان جهنم باشی

فصل سوم: تحلیل خرپاها و قاب‌ها:

تعریف سازه (structure): عبارتست از یک عضو یا مجموعه‌ای از اجزا که به منظور تحمل و انتقال نیرو به کار می‌رود.

مراحل تحلیل یک سازه:

1) بررسی و تأمین پایداری سازه (ناپایدار نباشد)
2) محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی
3) محاسبه نیروهای داخلی
4) محاسبه تغییر شکل‌های سازه

انواع سازه‌ها از نظر شکل و فرم:

1) سازه‌های وزنی (Mass structures):

سازه‌هایی هستند که مقاومت و پایداری آن‌ها به وزن‌شان بستگی دارد.

2) سازه‌های قاب بندی (Framed structures):

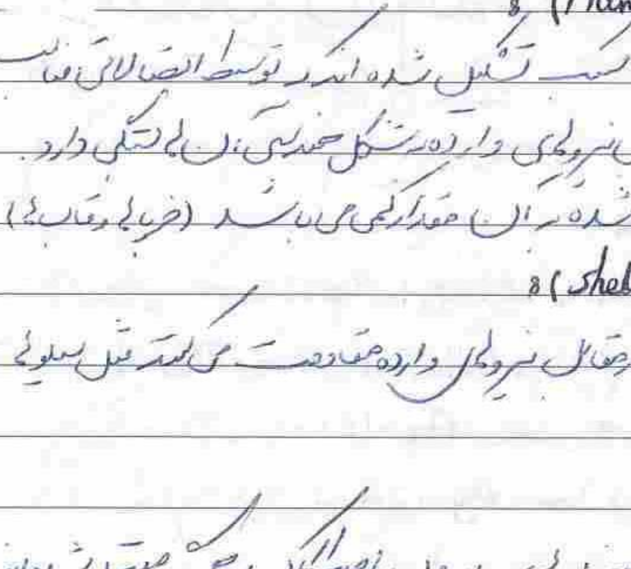
سازه‌هایی هستند که از یک سری اعضای لاغر تشکیل شده‌اند که توسط اتصالاتی به هم وصل شده‌اند و پایداری آن‌ها در مقابل نیروهای وارده به شکل هندسی آن‌ها بستگی دارد. وزن کل سازه در مقابل نیروهای اعمال شده به آن خیلی کم می‌باشد (خرپاها و قاب‌ها)

3) سازه‌های پوسته‌ای (Shell structures):

سازه‌هایی هستند که به صورت یک صفحه پوسته در مقابل نیروهای وارده مقاومت می‌کنند مثل سیلوها

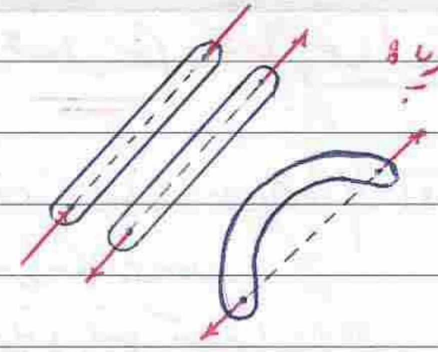
خرپاها (Trusses):

سازه‌ای است متشکل از تعدادی عضو صلب که توسط مفصل‌هایی بدون اصطکاک به همدیگر متصل شده‌اند و نیروهای وارد به آن فقط نیروهای متمرکزی هستند که در مفصل‌ها اثر می‌کنند (در واقع بین مفصل‌ها و در روی اعضا هیچ گونه نیرویی اعمال نمی‌گردد.) بدون اصطکاک



* از وزن اعضا صرف نظر می‌شود.

نتیجه گیری اساسی از فرضیات مندرج در تعریف خرپا:

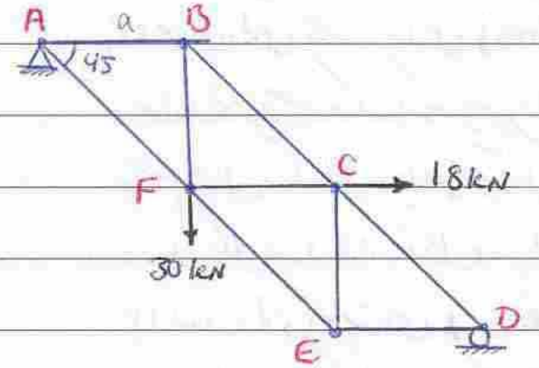


۱) اعضای خرپا همگی اعضای دو نیرویی هستند
و همگی تحت فشار یا کشش محوری هستند (خمیده نباشد)

روش های تحلیل خرپا:

۱) روش گره یا مفصل: (Joint Method) اساس روش گره یا مفصل بر این است که دیاگرام آزاد مفصل های خرپا به طور جداگانه ترسیم می گردد و با اعمال معادلات تعادل مجهولات مربوط به هر دیاگرام آزاد یافت می شود. از آنجا که دیاگرام آزاد هر مفصل یکی از حالات خاص است که همه نیروها در آن متقارب هستند حداکثر دو معادله مستقل تعادل می توان برای آن نوشت، لذا در ترتیب انتخاب مفصل ها باید دقت گردد که در دیاگرام آزاد هر مفصل حداکثر دو مجهول ظاهر شود.

مثال: در خرپای نشان داده شده نیروهای داخلی کلیه اعضا را بدست آورید.



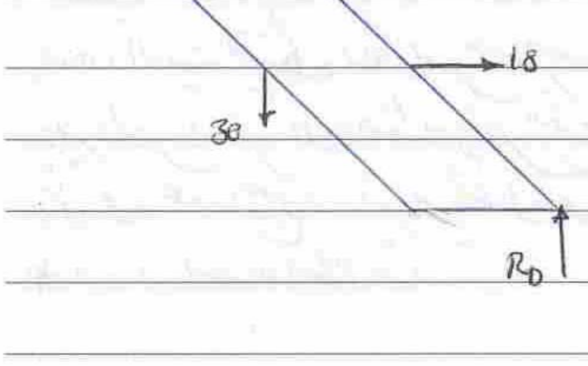
$$\Sigma M_A = 0$$

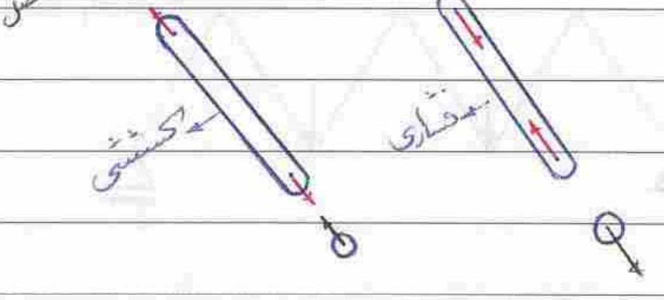
$$-30(a) + 18(a) + R_D(3a) = 0$$

$$\Rightarrow -12a + R_D(3a) = 0 \Rightarrow R_D = 4$$

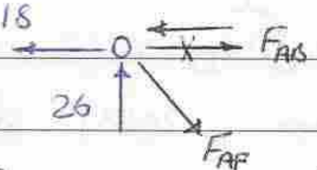
$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 18$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 26$$





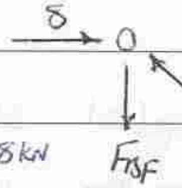
مفصل A :



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{AF}\, Sin45 = 26 \Rightarrow F_{AF} = 36.4\ kN$ (کششی)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + 36.4 \times Cos45 - 18 = 0 \Rightarrow F_{AB} = -8\ kN$ (فشاری)

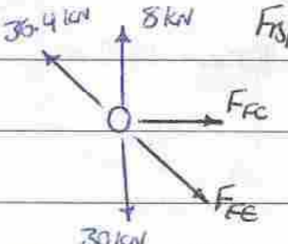
مفصل B :



$\Sigma F_x = 0 \quad F_{BC}\, Cos45 = 8 \Rightarrow F_{BC} = 11.2\ kN$ (فشاری)

$\Sigma F_y = 0 \quad F_{BF} = 11.2\, Sin45 \Rightarrow F_{BF} = 8\ kN$ (کششی)

مفصل F :

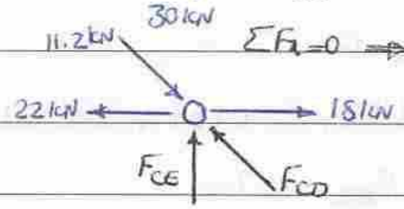


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{FE}\, Cos45 = 8 + 36.4\, Cos45 - 30$

$\Rightarrow F_{FE} = 5.28\ kN$ (کششی)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{FC} + 5.28\, Cos45 = 36.4\, Cos45 \Rightarrow F_{FC} = 22\ kN$ (کششی)

مفصل C :

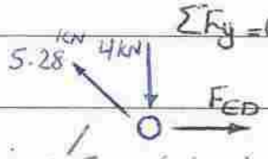


$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow 18 + 11.2\, Cos45 = 22 + F_{CD}\, Cos45$

$\Rightarrow F_{CD} = 5.54\ kN$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} + 5.54\, Cos45 = 11.2\, Cos45 \Rightarrow F_{CE} = 4\ kN$

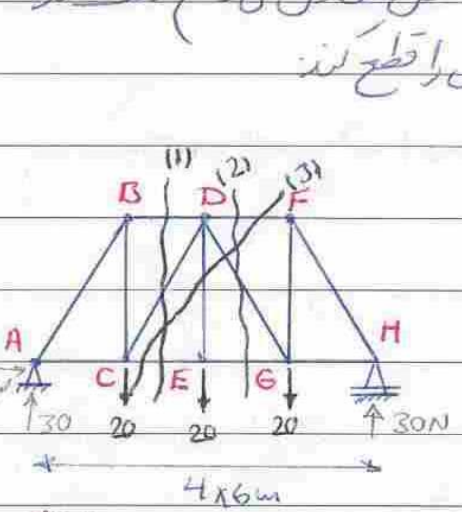
مفصل E :



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ED} = 5.28\, Cos45 = 3.7\ kN$

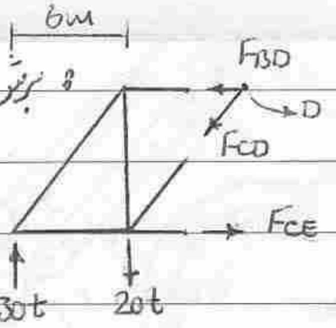
* در این روش در ابتدا واکنش های تکیه گاهی را با استفاده از ۳ معادله تعادلی برای سیستم کل خرپا بدست می آوریم سپس سراغ تک تک اعضا و مفاصل می رویم.

۲) روش مقطع (Section Method): اساس روش مقطع بر این است که با یک برش فرضی کل خرپا را به دو بخش مجزا از هم تقسیم کنیم. سپس با رسم دیاگرام آزاد یکی از آن بخش ها و اعمال معادلات مستقل تعادل نیروهای داخلی اعضایی را که توسط آن برش فرضی بریده شده بودند را بدست می کنیم. از آنجایی که در دیاگرام آزاد در حالت کلی حداقل ۳ معادله مستقل تعادل می توان نوشت لذا باید دقت کرد که برش فرضی در جایی زده شود که حداکثر سه عضو مجهول را قطع کند.



مثال: در خرپای نشان داده شده نیروهای داخلی اعضای CE , DE , DF را بدست آورید.

برش (۱):

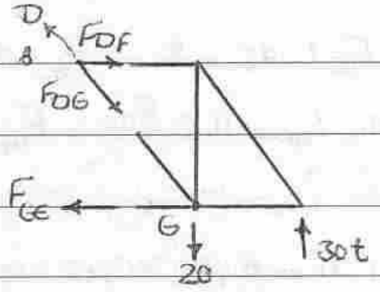


$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_D = 0$$

$$\Rightarrow +20(6) - 30(12) + F_{CE}(6) = 0$$

$$\Rightarrow F_{CE} = 40\ \text{ton}$$

برش (۲):

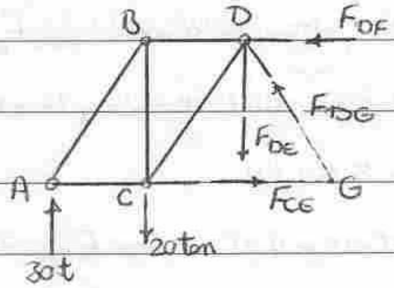


$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_G = 0$$

$$\Rightarrow -F_{DF}(6) + 30(6) = 0$$

$$\Rightarrow F_{DF} = 30\ \text{ton}$$

برش (۳):



$$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum M_G = 0$$

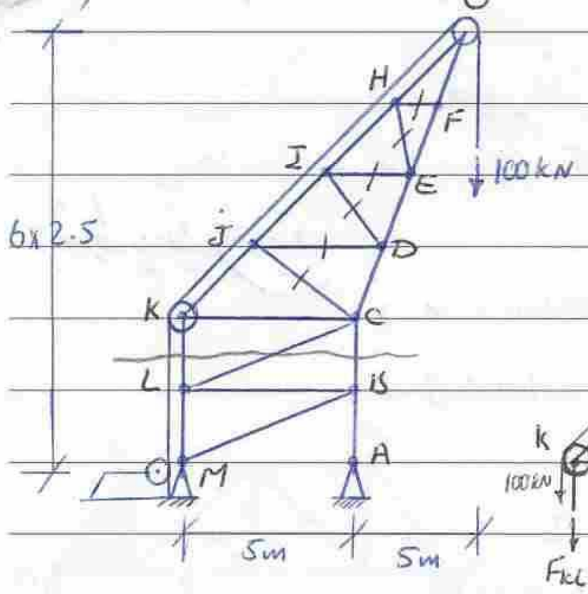
$$30(6) + F_{DE}(6) + 20(12) - 30(18) = 0$$

$$\Rightarrow F_{DE} = 20\ \text{ton}$$

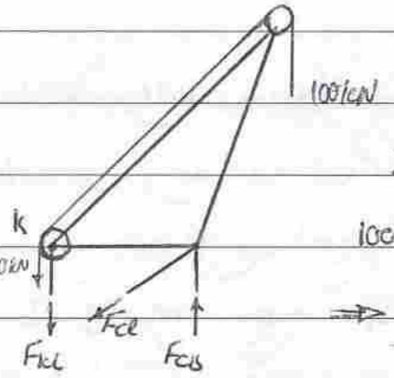
* در این مثال که چند نیرو به پایین خرپا اعمال می‌گردد نیرو در اعضای پایینی خرپا فشاری و در اعضای بالای آن کششی است.

مثال ۵: در خرپای نشان داده شده نیروی اعضای CJ، CL و CB را بدست آورید. (شعاع قرقره‌ها R می‌باشد)

* در نقطه A تنها یک نیرو وجود دارد



$F_{HF} = F_{HE} = F_{IE} = F_{ID} = F_{JD} = F_{JC} = 0$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CL} = 0$

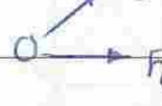
$\sum M_K = 0 \Rightarrow$

$100(R) + F_{CB}(5) - 100(10+R) = 0$

$\Rightarrow F_{CB} = 200$

اعضای صفر نیرویی:

۱) اگر به مفصلی از خرپا فقط ۲ عضو متصل باشد (که در یک راستا نباشند) و هیچ نیروی خارجی به آن اعمال نگردد نیروهای داخل هر دو عضو برابر با صفر خواهد شد.

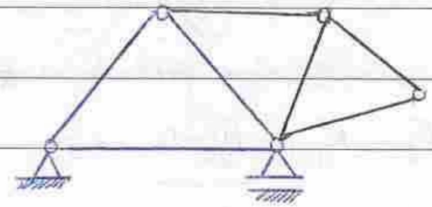


$F_1 = F_2 = 0$

۲) اگر به مفصلی از خرپا فقط ۳ عضو متصل باشد که دوتا از آنها در یک راستا باشند و هیچ نیروی خارجی نیز به مفصل اعمال نگردد نیروی داخل عضو سوم صفر خواهد بود.

$F_1 = 0$

پایداری و ناپایداری داخلی خرپاها:



خرپای مثلثی پایه یا اولیه

شرط پایداری خرپا:

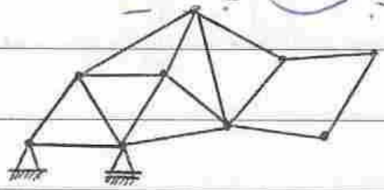
$m-3$: تعداد اعضای اضافه شده به خرپای مثلثی — m : تعداد اعضای خرپا

$j-3$: تعداد مفصل‌های اضافه شده به خرپای مثلثی ⟹ j : تعداد مفصل‌های خرپا

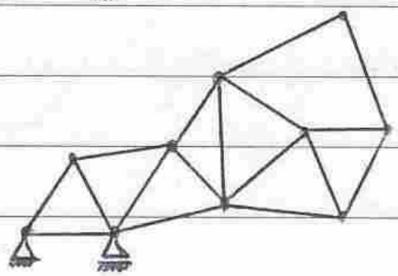
$$m-3 = 2(j-3) \Rightarrow m = 2j-3$$

تعداد اعضای اضافه شده ۲ برابر تعداد مفصل‌های اضافه شده است

نتیجه اولیه: اگر $m<2j-3$ باشد خرپا حتماً ناپایدار است و اگر $m \geq 2j-3$ باشد خرپا یا پایدار است یا ناپایدار. ولذا ضرورت دارد شکل‌بندی و نحوه تشکیل خرپا بررسی شود که آیا خرپا به صورت اضافه شدن‌های دوبه‌دو تک مفصل و دو عضو به خرپای مثلثی پایه تشکیل شده است یا خیر.

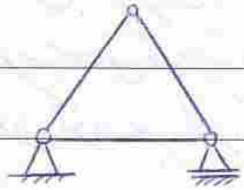


← ناپایدار



← پایدار

معینی و نامعینی داخلی خرپاها:



خرپای مثلثی پایه همواره معین است { ۶ مجهول، ۶ معادله

هر یک مفصلی که اضافه کنیم ۲ تا معادله و ۲ تا مجهول اضافه می‌کند.

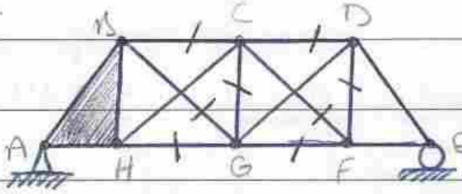
نتیجه‌گیری نهایی بحث: اگر $m<2j-3$ باشد خرپا ناپایدار است. معینی یا نامعینی بررسی نمی‌شود.

۲) اگر $m=2j-3$ باشد خرپا می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد پس باید شبکه‌بندی کنترل شود. اگر پایدار بود معین است.

۳) اگر $m>2j-3$ باشد خرپا می‌تواند پایدار یا ناپایدار باشد پس شبکه‌بندی باید کنترل شود. اما اگر پایدار باشد نامعین است. $درجه نامعینی = m-(2j-3)$

* خرپاهای بررسی شده اصطلاحاً خرپای ساده نام دارند.

مثال: خرپاهای نشان داده شده را از نظر پایداری و ناپایداری و معینی و نامعینی اعم از خارجی و داخلی کنترل کنید.

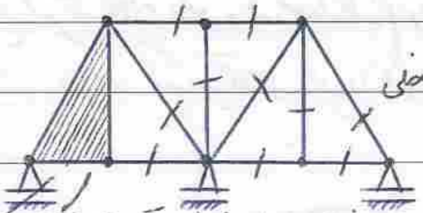


چون پایدار است و $m>2j-3$ پس درجه نامعینی دارد که برابر است با $n=2$

داخلی: $m=15$ $j=8$ $2j-3=13 \Rightarrow m>2j-3$

شبکه‌بندی را چک می‌کنیم که آیا خرپا بر اثر اضافه شدن پی در پی یک مفصل و دو عضو به خرپای مثلثی ایجاد شده باشد. که اینگونه است. پس پایدار است.

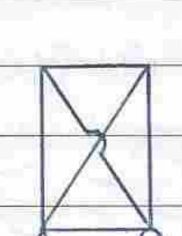
خارجی: سه قید تکیه‌گاهی داریم که نه متقاربند و نه موازی پس پایدار است.
سه تا مجهول و سه تا معادله مستقل داریم پس معین است.



داخلی: $m=13$ $j=8 \rightarrow m=2j-3$

از نظر داخلی پایدار است و بنابراین معین است.

خارجی: ناپایدار است چون نیروهای تکیه‌گاهی موازی‌اند. (در یک حالت خاص پایدار است هنگامی که راستای نیروهای وارده بر خرپا موازی نیروهای قیدهای تکیه‌گاهی باشد.) درجه نامعینی خرپا (خارجی) برابر یک است.



$m=6$ $j=4$ $m>2j-3$

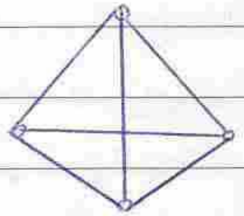
داخلی: نامعین و پایدار است (پس از بررسی شبکه‌بندی)

خارجی: معین و پایدار است

در بررسی معینی داخلی 8 معادله داریم 9 مجهول پس نامعین است.

اگر گفت معینی، نامعینی، پایداری، ناپایداری را بررسی کنید باید مطالب جمع‌بندی نهایی را شرح دهیم.

آشنایی با خرپاهای فضایی :



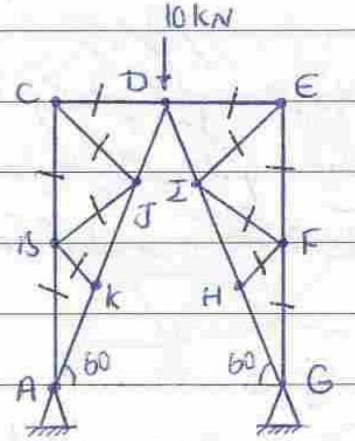
خرپای ساده فضایی پایه

می‌توان با اضافه کردن یک مفصل به سه عضو خرپای پایدار ایجاد نمود.

m : تعداد اعضای خرپا — m-6 : تعداد اعضای اضافه شده به خرپای ساده فضایی

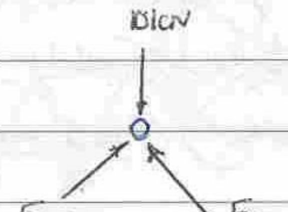
j : تعداد مفصل‌های خرپا — j-4 : تعداد مفاصل اضافه شده به خرپای ساده فضایی

$$\Rightarrow \quad m-6=3(j-4) \quad \Rightarrow \quad m=3j-6$$



مثال : مطلوبست محاسبه نیروهای داخلی اعضای خرپا.

ناپایداری داخلی خرپا بر اثر اضافه شدن سه مولفه تکیه‌گاهی پایدار شده است
(کمبود ناپایداری داخلی را توسط یک عامل خارجی تأمین کردیم)
اگر قیدهای تکیه‌گاهی بیش از مقدار لازم برای پایداری باشد سازه نامعین است. در اینجا قید تکیه‌گاهی بیش از مقدار لازم نیست پس معین است.



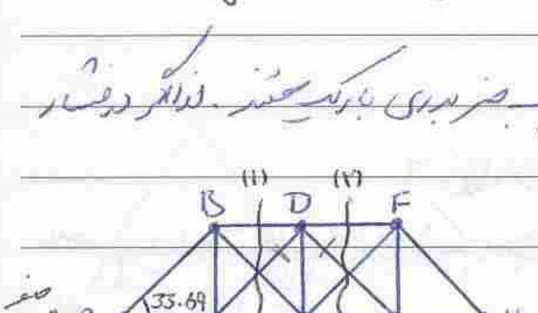
$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{DJ}=F_{DI}$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{DJ}=F_{DI}=5.77\,kN$$

$$F_{JK}=F_{AK}=F_{HI}=F_{HG}=5.77\,kN$$

این خرپا یک خرپای مرکب است.

مثال : خرپای شکل نشان داده شده مفروض است: اعضای قطری ضربدری باریک هستند. لذا اگر در فشار واقع شوند کمانش می‌کنند (فشار نمی‌توانند تحمل کنند). تحت اثر بارگذاری نشان داده نیرو را در اعضای قطری بدست آورید و همچنین نیروی عضو DE را محاسبه نمایید.



(به این اعضای باریک کابل گفته می‌شود)

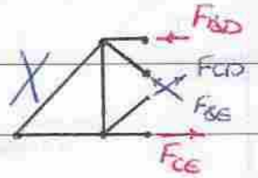
چون تمام نیروها کششی هستند پس عضو AH می‌خواهد فشرده گردد و عضو BF کشیده می‌شود.

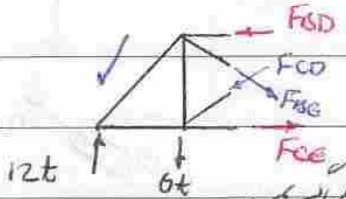
از اینجا می‌دانیم که عضوهای ما کشش دارند یا فشار.

$\sum M_A = 0$

$A_y = 12t \quad , \quad R_H = 15t$

برش ۱

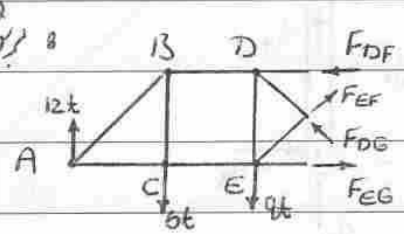




چون F_{CD} فشاری است پس در نظر می‌گیریم.

$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BE} = 10.8t$

برش (۲)



چون F_{DG} فشاری است پس در نظر می‌گیریم.

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{EF} \sin 33.69 + 12 = 9 + 6$

$\Rightarrow F_{EF} = 5.4t$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DG} = 0 \quad , \quad F_{EF} =$

$F_{DE} = 0$ در مفصل D که سه عضو است که دو عضو در یک راستا اند

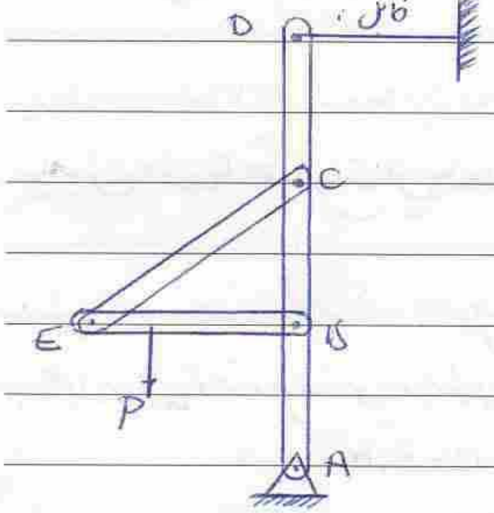
* هرگاه در خرپا دو عضو جدید در مفصل جدید متصل شوند و خود نیز با مفصل جدید به هم متصل گردند خرپایی را که به این طریق ساخته می‌شود خرپای ساده می‌نامند. برای تحلیل کردن خرپای ساده از یک مثلث شروع می‌کنیم و هر دو عضو و مفصل نیز را اضافه می‌کنیم.

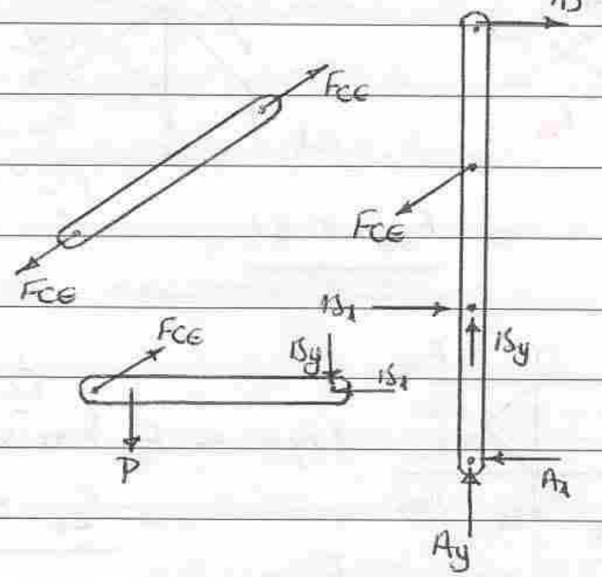
نکته: برای رسم دیاگرام آزاد هر یک از اعضای یک قاب ما ابتدا عضوهای دو نیرویی را در نظر می‌گیریم سپس سراغ اعضای چند نیرویی می‌رویم. در اعضای چند نیرویی قاب که یک نقطه مفصل دارد چون جهت و مقدار نیروهای وارده معلوم نیست این نیروها را با مولفه‌های x و y نشان داده‌ام.

قاب ها (Frames) :

قاب ها سازه هایی هستند که حداقل دارای یک عضو چند نیرویی باشند. (تعریفی است که قاب را از خرپا متمایز می کند.)

مثال :



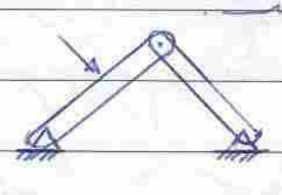


در اینجا ۶ مجهول و ۷ معادله داریم که یک معادله برای عضو CE است و به درد نمی خورد.

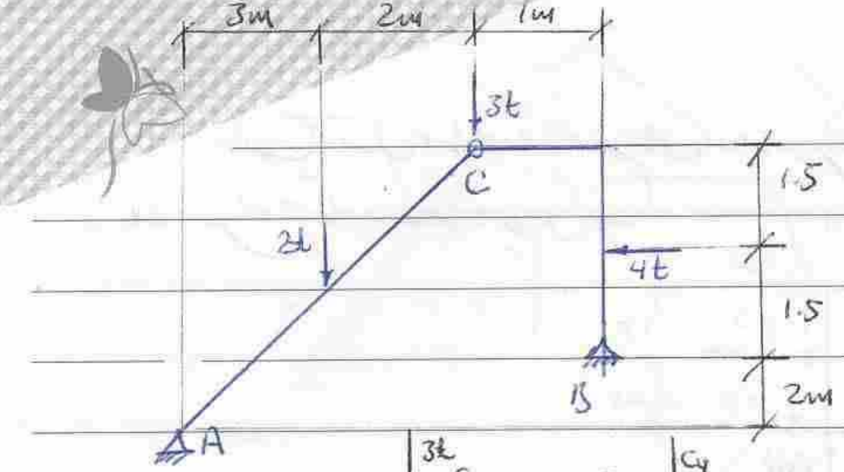
انواع قاب ها :

صلب : قاب هایی هستند که در صورتیکه از تکیه گاه های خود جدا شوند صلب باقی می مانند و هندسه داخلی آن ها تغییری نکند. (قاب مثال)

غیر صلب : قاب هایی هستند که در صورت انفکاک از تکیه گاه ها شکل اولیه آن ها به هم می ریزد و تغییر می کند صلبیت و پایداری داخلی آن ها توسط عکس العمل های تکیه گاه های خارجی تأمین شده است.

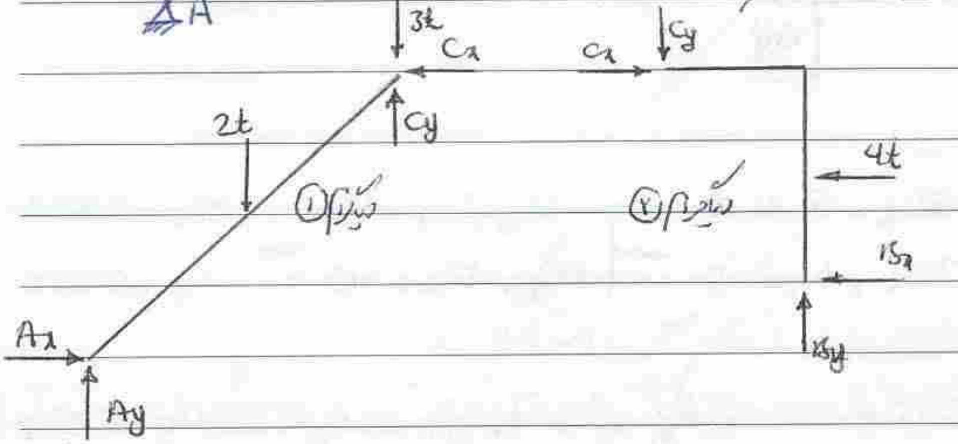


روش های تحلیل قاب ها : جهت تحلیل قاب های صلب ابتدا با رسم دیاگرام آزاد کل قاب عکس العمل ها را، دیاگرام آزاد را رسم و سپس با جدا کردن تک تک اعضا از یکدیگر نیروهای داخلی بین اعضا را بدست می آوریم ولی برای تحلیل قاب های غیر صلب باید ابتدا کلیه اعضا را از یکدیگر و کلیه اعضا جدا کنیم و سپس با اعمال کلیه معادلات تعادل عکس العمل کلیه نیروهای داخلی را توأماً بدست آوریم.



مثال ۵: برای قاب نشان داده شده عکس العمل های خارجی تکیه گاه ها و نیروهای داخلی در مفصل C را حساب کنید.

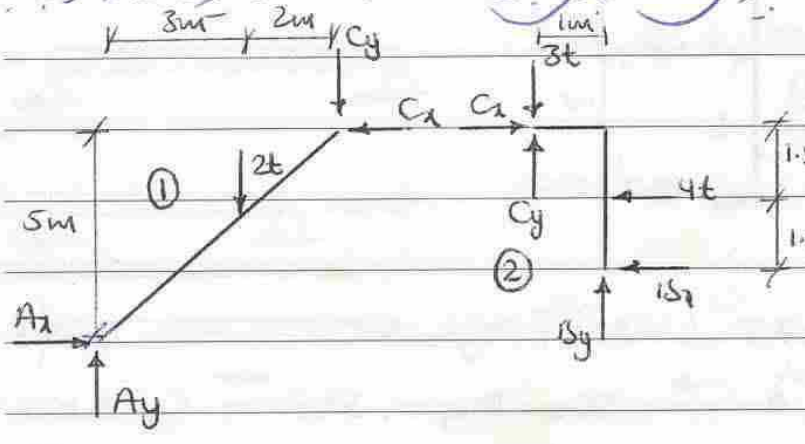
یک قاب غیر صلب است. پس ابتدا کلیه اعضا را جدا می کنیم و با اعمال شرط تعادل نیروها را پیدا می کنیم.



$$\text{عضو ۱: } \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_x + C_y = \frac{21}{5} \\ -C_y + 3C_x = 6 \end{cases} \Rightarrow C_x = 2.55t \quad C_y = 1.65t$$
$$\text{عضو ۲: } \Sigma M_B = 0$$

$A_x = 2.55$ $\quad A_y = 3.35t$ $\quad B_x = 1.45t$ $\quad B_y = 1.65t$

تمرین ۱۰: مثال فوق را مجدداً با این فرض که نیروی 3t در سمت راست قرار گیرد حل کرده و جواب را مقایسه کنید. $C_y = 1.35$

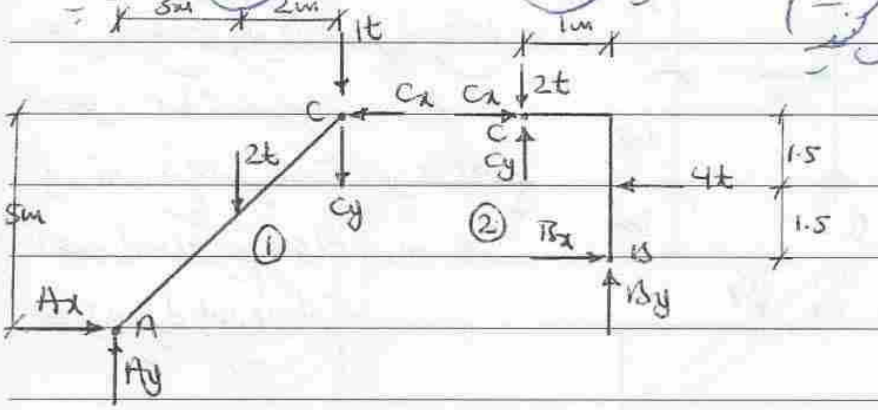


$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ -3C_x - C_y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ 3C_x + C_y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5C_x - 5C_y = 6 \\ 15C_x + 5C_y = 45 \end{cases} \Rightarrow C_y = 1.35t \quad C_x = 2.55t$$
$$\Sigma M_B = 0$$

$\rightarrow \Sigma F_{x_1} = 0 \Rightarrow A_x = 2.55t \qquad \Sigma F_{y_1} = 0 \Rightarrow C_y + 2 = A_y \Rightarrow A_y = 3.35t$

$\Sigma F_{y_2} = 0 \Rightarrow B_y + C_y = 3 \Rightarrow B_y = 1.65t \quad \Sigma F_{x_2} = 0 \Rightarrow C_x = 4 + B_x \Rightarrow B_x = -1.45t$

تمرین ۲: شکل ۲ را مجدداً با این فرض که نیروی متمرکز 3t به مقدار 1t روی بخش سمت چپ و 2t روی سمت راست قرار گیرد حل کنید.



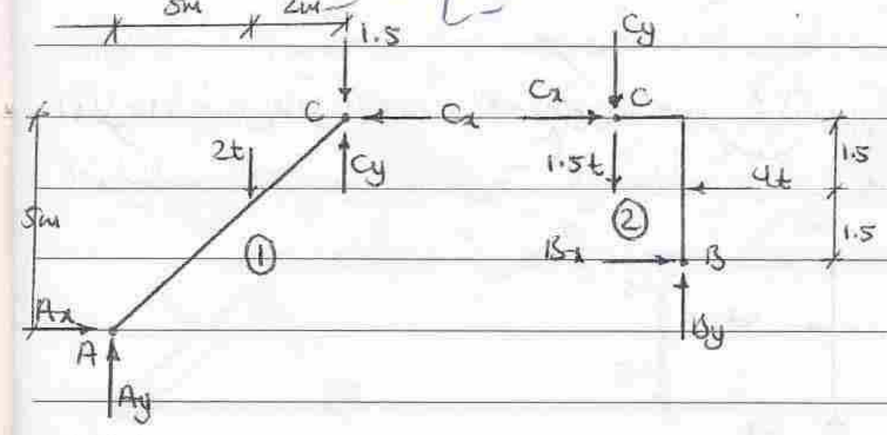
$\sum M_A = 0 \Rightarrow -5C_y + 5C_x - 5 - 6 = 0$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow -C_y - 3C_x + 6 + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5C_y + 5C_x = 11 \\ 5C_y + 15C_x = 40 \end{cases} \Rightarrow C_x = 2.55t,\ C_y = 0.35t$

$\rightarrow \sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow A_x = 2.55t \qquad \sum F_{y_1} = 0 \Rightarrow 1 + C_y + 2 = A_y \Rightarrow A_y = 3.35t$

$\rightarrow \sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow C_x + B_x = 4 \Rightarrow B_x = 1.45t \qquad \sum F_{y_2} = 0 \Rightarrow B_y + C_y = 2 \Rightarrow B_y = 1.65t$

تمرین ۳: شکل فوق را با فرض اینکه 3t را به 1.5t و 1.5t تبدیل کنیم حل کنید.

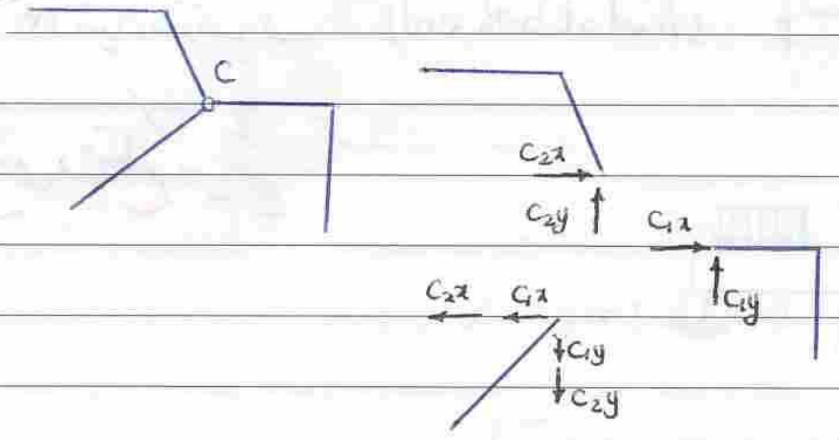


$\sum M_A = 0 \Rightarrow 5C_x + 5C_y = 6 + 7.5 \qquad 5C_x + 5C_y = 13.5 \qquad C_x = 2.55t$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow C_y - 3C_x = -1.5 - 6 \Rightarrow 15C_x - 5C_y = +37.5 \Rightarrow C_y = 0.15t$

$\sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow A_x = 2.55t \qquad \sum F_{y_1} = 0 \Rightarrow A_y + C_y = 1.5 + 2 \Rightarrow A_y = 3.35t$

$\sum F_{x_2} = 0 \Rightarrow C_x + B_x = 4 \Rightarrow B_x = 1.45t \qquad \sum F_{y_2} = 0 \Rightarrow C_y + 1.5 = B_y \Rightarrow B_y = 1.65$



فصل چهارم: نیروهای داخلی در سازه‌های معین استاتیکی:
(Internal forces in statically determinate structures)

تیر (beam): عبارت است از عضو سازه‌ای که نیروهای وارده را از طریق خمشی که در آن ایجاد می‌شود تحمل می‌کند.

انواع تیرها:

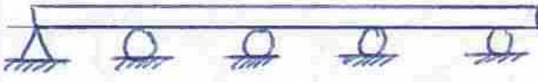
الف) تیرهای معین:

۱) تیر ساده (Simply_suported)

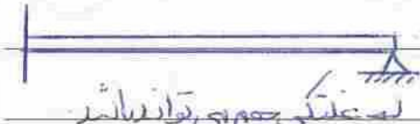
۲) تیر ساده کنسولی (overhanging)

۳) تیر کنسولی یا طره‌ای یا یکسرگیردار (Cantilever)

ب) تیرهای نامعین:

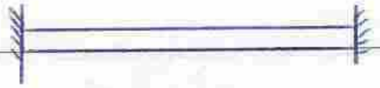


۱) تیر ممتد یا سراسری یا یکسره یا سرتاسری (Continous beam)



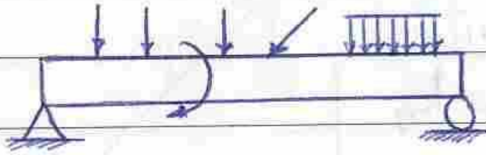
۲) تیر یکسرگیردار یکسرساده (fixed_simply)

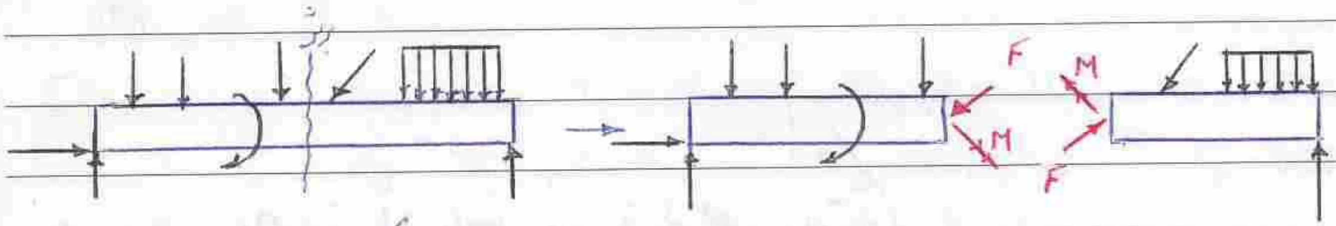
به غلتکی هم می‌تواند باشد



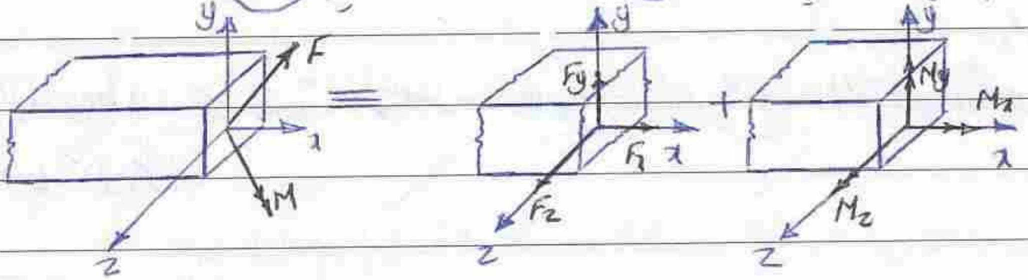
(fixed at both end) ۳) تیر دو سر گیردار

نیروهای داخلی در مقطع یک تیر:





در مقطع هر عضو چند نیروی (تیر) نیروهای داخلی عبارتند از یک نیروی F و لنگر M.



F_x: نیروی محوری axial force M_x: لنگر پیچشی Torsion Moment

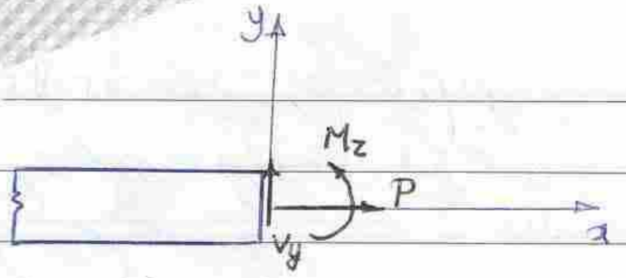
F_y, F_z = نیروی برشی shear force M_y, M_z: لنگر خمشی bending Moment

و نحوه به لنگر خمشی می گوییم.

$F_x \rightarrow P$ $M_x \rightarrow T$

$F_y, F_z \rightarrow V_y, V_z$ یا Q $M_y, M_z \rightarrow M_y, M_z$

حالت خاص دوبعدی :



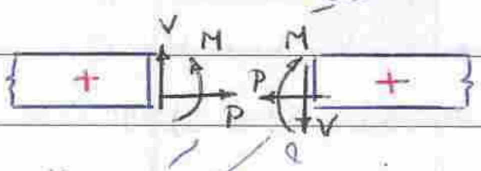
در صفحه سه تا نیرو داریم. (اندیس ها را حذف می کنیم)

قرارداد جهات مثبت برای نیروهای داخلی تیرها :

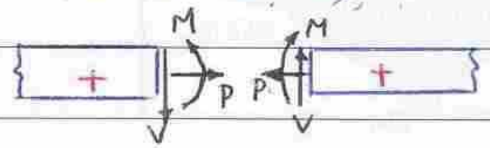
الف) سه بعدی : قرارداد مثبت دقیقاً منطبق بر جهات مثبت محورهای دکارتی (کارتزین) است.

ب) دوبعدی :

۱) دقیقاً منطبق بر جهات مثبت دستگاه کارتزین



۲) مانند قرارداد اول با این تفاوت در جهت نیروی برشی عکس آن باشد.



P و M هم علامت و V علامتی مخالف P و M دارد

* جهت نیروی برشی در مسائل طراحی مسئله‌ی مهمی نیست. بنابراین دو قرارداد وجود دارد.
* بنابراین از این به بعد از قرارداد دوم استفاده می کنیم.

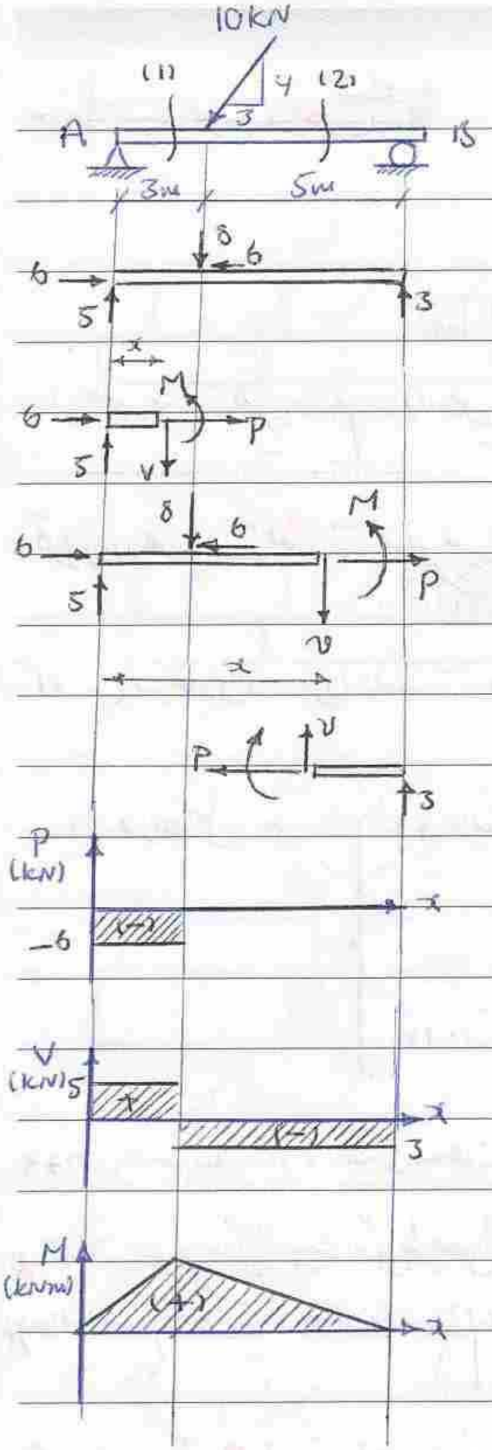
نحوه رسم دیاگرام های نیروهای داخلی در طول یک تیر :

۱) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی در صورت لزوم.

۲) ایجاد مقطعی فرضی در تیر و رسم دیاگرام آزاد یکی از بخش های تیر با رعایت جهات قراردادی مثبت برای نیروهای داخلی.

۳) اعمال معادلات مستقل تعادل برای دیاگرام آزاد فوق و یافتن نیروهای داخلی در آن مقطع.

۴) ادامه مراحل ۲ و ۳ برای کلیه بخش هایی از تیر که بین نیروهای متمرکز، گشتاورهای متمرکز و ابتدای بارهای گسترده و انتهای بارهای گسترده قرار دارد.



مثال ۸: مطلوبست رسم دیاگرامهای تغییرات نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر نشان داده شده.

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(8)(3) + B_y(8) = 0$

$\Rightarrow B_y = 3\ kN$

$\Rightarrow A_y = 5\ kN$

$A_x = 6\ kN$

برش (1): $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P = -6$

$0 \le x \le 3$ $\quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 5$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M - 5x = 0 \Rightarrow M = 5x$

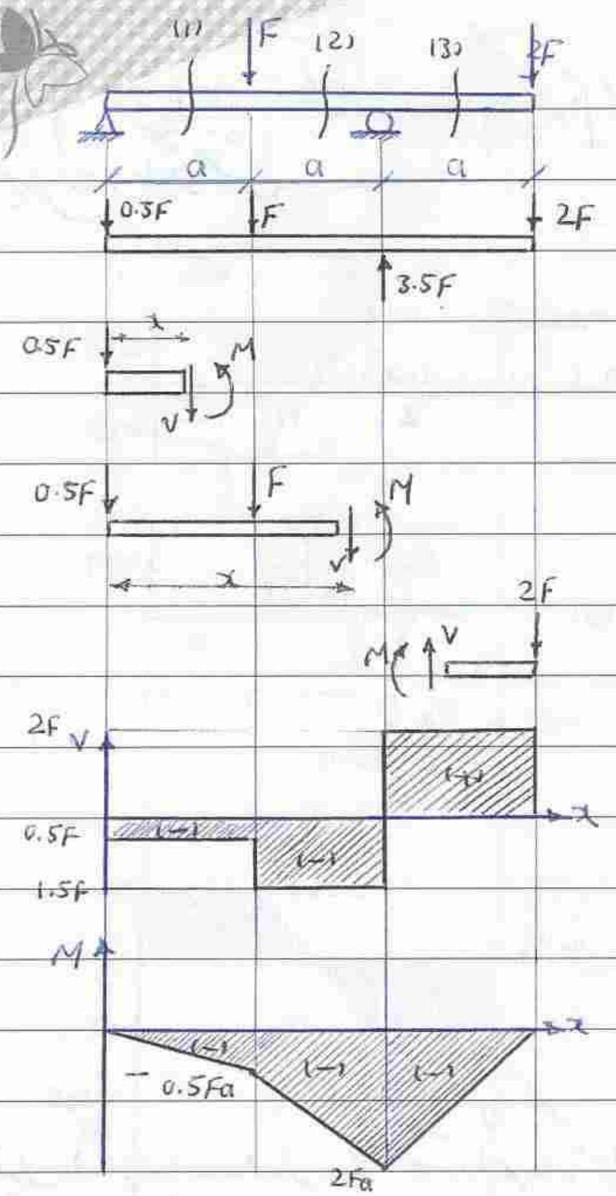
برش (2): $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P = 0$

$3 \le x \le 8$ $\quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 5 - 8 \Rightarrow V = -3$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M - 5x + 8(x-3) = 0$

$\Rightarrow M = -3x + 24$

مثال ۲ : مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



برش (۱) : $\sum F_y=0 \Rightarrow V=-0.5F$

$\sum M_{(1)}=0 \Rightarrow M=-0.5Fx$

برش (۲) : $\sum F_y=0 \Rightarrow V=-1.5F$

$\sum M_{(2)}=0 \Rightarrow M+0.5Fx+F(x-a)=0$

$\Rightarrow M=-1.5Fx+F.a$

برش (۳) : $\sum F_y=0 \Rightarrow V=2F$

$\sum M=0 \Rightarrow M=-2F(3a-x)$

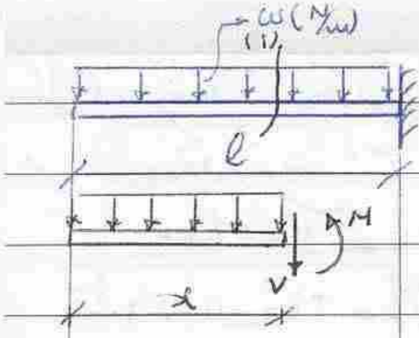
۱) در دیاگرام برشی در زیر محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره انفصال داریم.

۲) میزان انفصال هم به اندازه همان نیروی انفصال است.

۳) در دیاگرام لنگر خمشی در محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره شکستگی داریم.

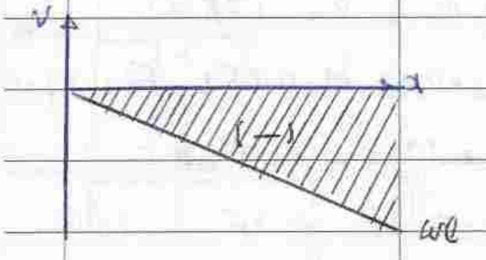
۴) معادله نیروی برشی مشتق معادله لنگر برشی است.

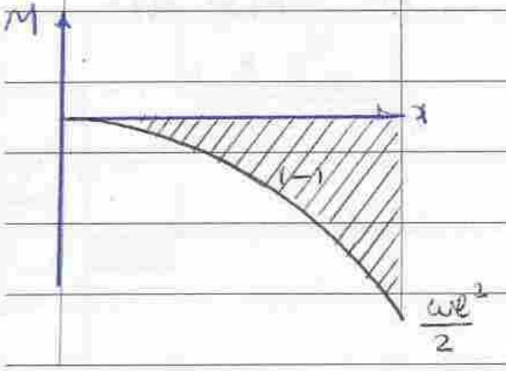
مثال ۶۳: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



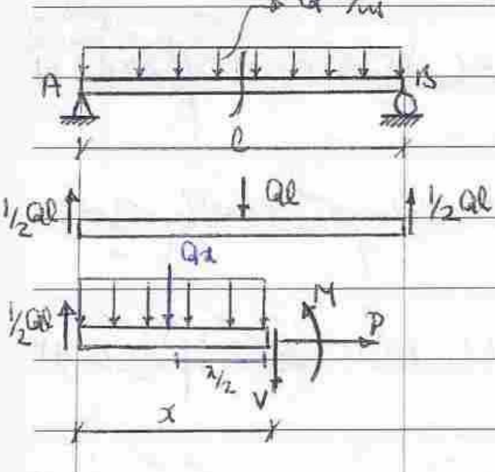
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\omega x$$

$$\sum_{(1)} M = 0 \Rightarrow M = -\frac{\omega x^2}{2}$$





تمرین: تیری به طول l که اثر بار یکنواخت Q N/m را داریم. دیاگرام های لنگر خمشی و نیروی برشی را بدست آورید.



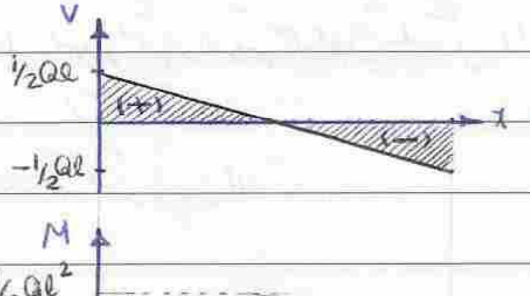
$$\sum M_A = 0 \quad -Ql(l/2) + B_y(l) = 0 \Rightarrow B_y = 1/2\, Ql$$

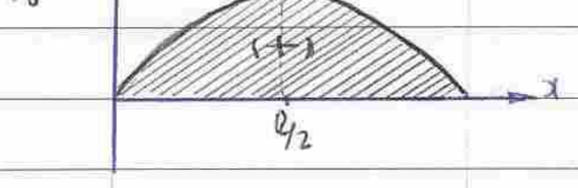
برش:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 1/2\, Ql - Qx$$

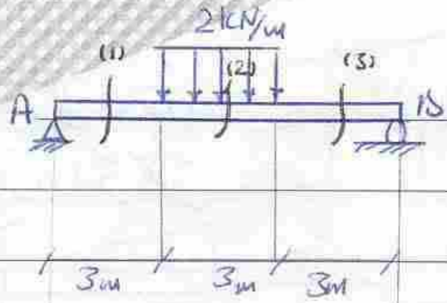
$$\sum M = 0 \Rightarrow -1/2\, Ql(x) + M + Qx(x/2) = 0$$

$$\Rightarrow M = 1/2\, Qx(l - x)$$





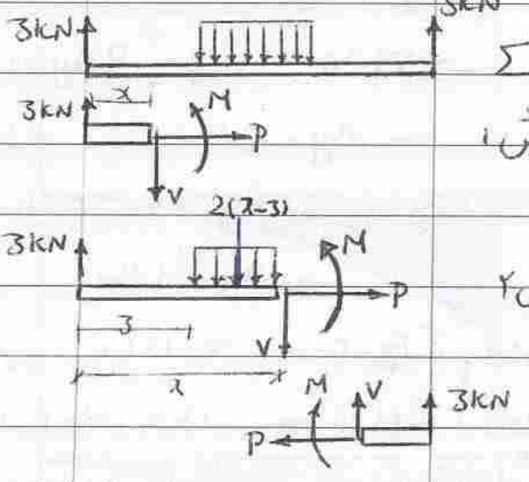
مثال: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -(2\times 3)\times 4.5 + 9 B_y = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 3\,kN$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 3\,kN$$



برش ۱:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 3\,kN$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -3x + M = 0 \Rightarrow M = 3x$$

برش ۲:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 3 - 2(x-3) - V = 0$$

$$\Rightarrow V = -2x + 9$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -3x + \left(\frac{x-3}{2}\right)(x-3)2 + M = 0$$

$$\Rightarrow M = 3x - (x-3)^2$$

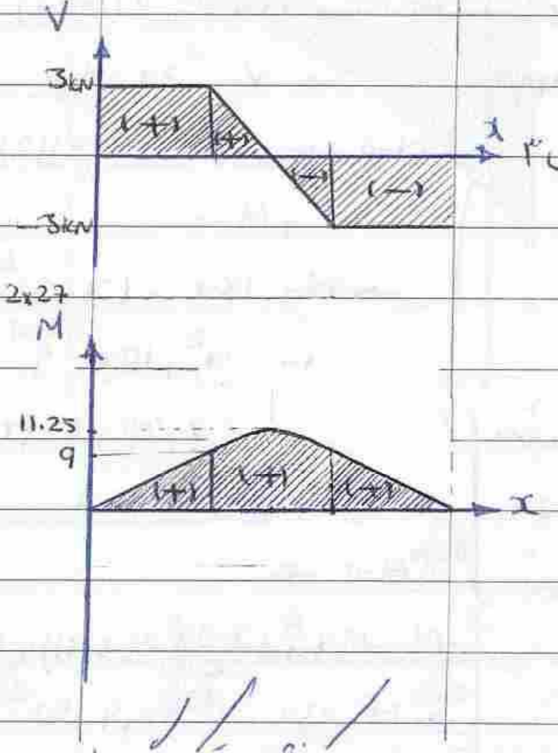
$$\Rightarrow M = -x^2 + 9x + 9$$

برش ۳:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -3\,kN$$

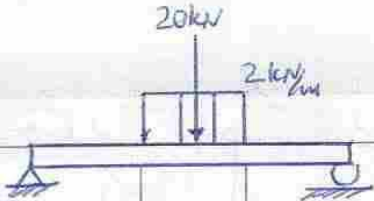
$$\Sigma M = 0 \Rightarrow 3(9-x) - M = 0$$

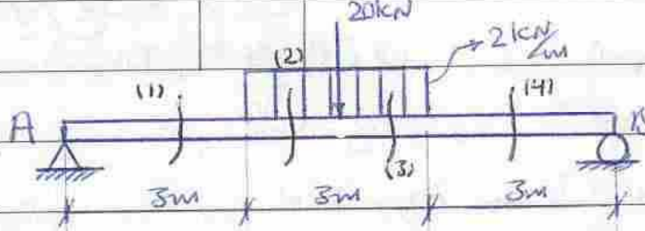
$$\Rightarrow M = 27 - 3x$$



نکته بسیار مهم: اگر در قسمتی از تیر بار گسترده داشته باشیم می توانیم برای محاسبه واکنش در تکیه گاه ها این بار گسترده را به بار متمرکز تبدیل کنیم. ولی برای محاسبه نیروهای داخلی در تیر (در صورتیکه محل برش محل اعمال نیروی گسترده باشد) از این جایگزینی استفاده نمی کنیم.

مثال : مطلوبست رسم نمودار های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.





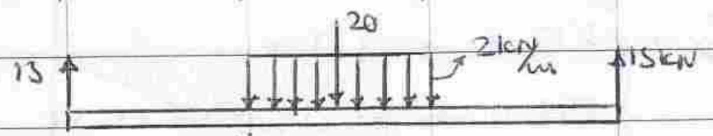
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow$

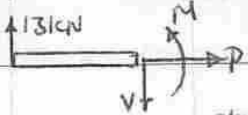
$-4.5(20+2\times 3)+9B_y=0$

$\Rightarrow B_y = 13\,kN$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + 13 = 20 + 6$

$\Rightarrow A_y = 13\,kN$



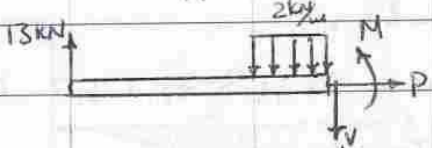


برش (1) :

$0 \le x \le 3$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 13\,kN$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow -13x + M = 0 \Rightarrow M = 13$ (13)



برش ۲ :

$3 \le x \le 4.5$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 13 = V + 2(x-3)$

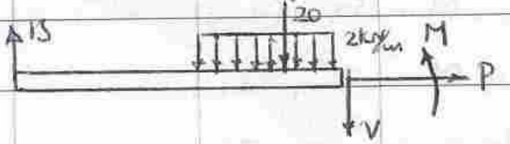
$\Rightarrow V = -2x + 19$

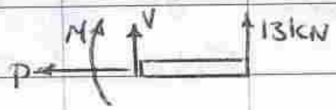
$\Sigma M = 0 \Rightarrow -13x + (\frac{x-3}{2})(2)(x-$

$+M=0$

$\Rightarrow M = 13x - (x-3)^2$

$\Rightarrow M = -x^2 + 19x - 9$ ($-2x+19$) (13)





برش ۳ :

$4.5 \le x \le 6$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 13 = V + 20 + (2(x-3))$

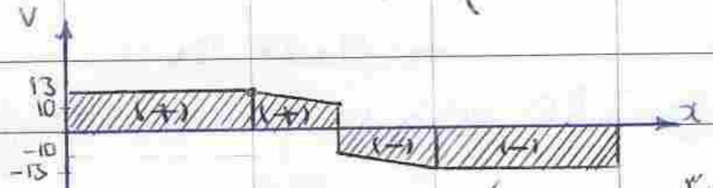
$\Rightarrow V = -2x - 1$

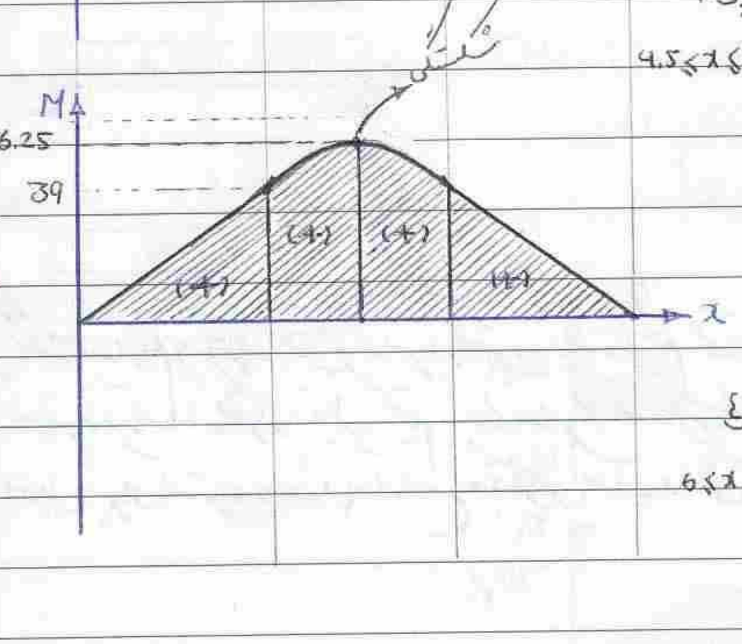
$\Sigma M = 0 \Rightarrow$

$M - 13x + (\frac{x-3}{2})(2(x-3)) + 20(4.$

$\Rightarrow M - 13x + x^2 - 6x + 9 - 90 + 20x$

$\Rightarrow M = -x^2 - x + 81$





برش ٤ :

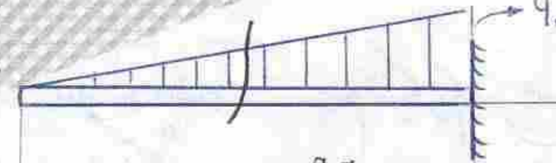
$6 \le x \le 9$

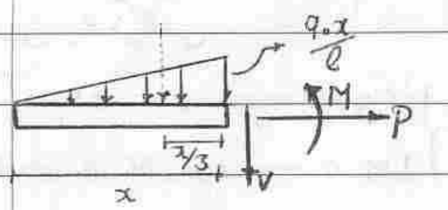
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -13\,kN$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow -M + 13(9-x) = 0$

$\Rightarrow M = 117 - 13x$

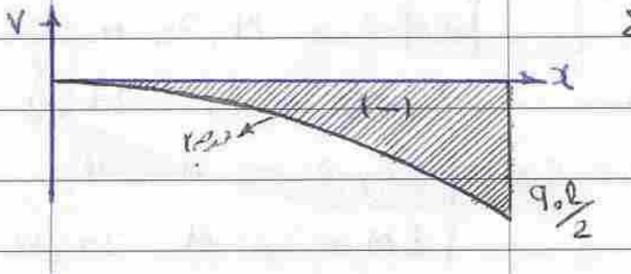
مثال ۵: مطلوبست رسم دیاگرام تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی

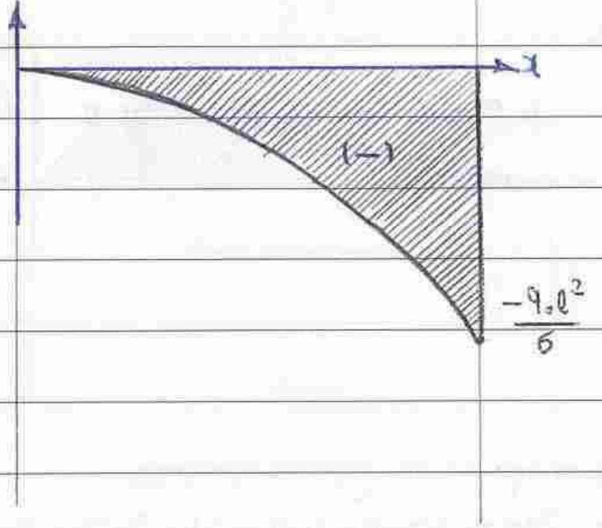


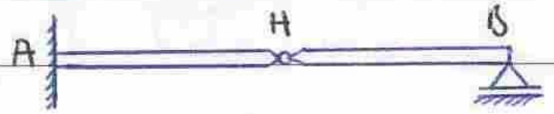


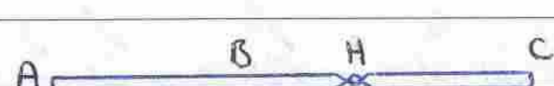
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = -\frac{q_0 x^2}{2l}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M = -\frac{q_0 x^3}{6l}$$



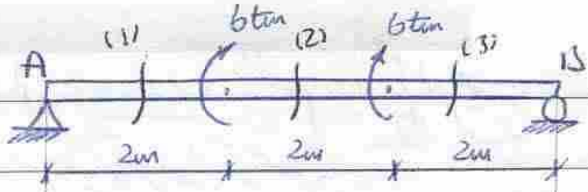


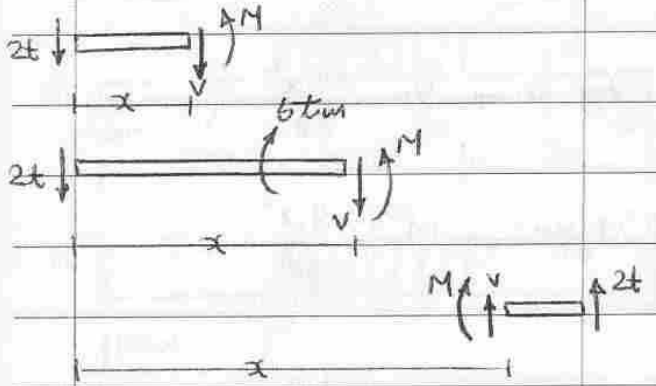




نکته 8: گاهی دو یا چند تیر بهم مفصل می‌شوند و یک سازه پیوسته را تشکیل می‌دهند. در دو تیر نمونه مفصل در نقطه H وجود دارد. در این تیرها واکنش در تکیه‌گاه‌ها چهار مجهول دارند و آن‌ها را از نمودار جسم آزاد کل سیستم نمی‌توان تعیین کرد، بلکه باید نمودار جسم آزاد هر تیر را بطور جداگانه در نظر گرفت. در این حالت شش مجهول (شامل دو مولفه نیرو در مفصل) و شش معادله داریم.

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



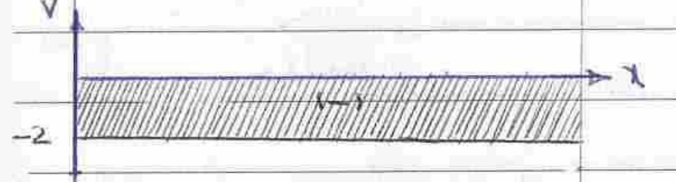


برش ۱: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -2t \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow 2x + M = 0 \Rightarrow M = -2x \end{cases}$

برش ۲: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -2t \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow M + 2x - 6 = 0 \end{cases}$

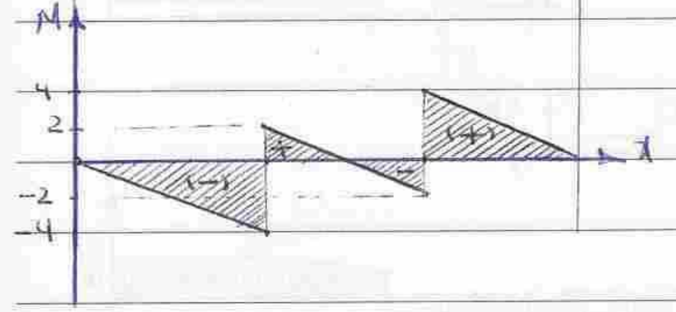
$\Rightarrow M = -2x + 6$

برش ۳: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = -2t \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow M = -2x + 12 \end{cases}$



$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -6 - 6 + 6B_y = 0 \Rightarrow B_y = 2t$

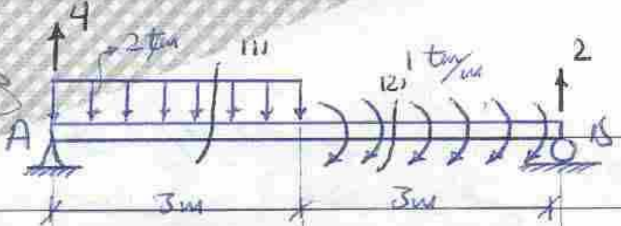
$A_y = -2t$



هرجا لنگر خارجی متمرکز داشته باشیم انفصال در نمودار لنگر خمشی داریم.

در حالت کلی برای تیر اصلی لنگر که حالت آزاد دارند چون در نیروهای داخلی تغییر ایجاد می شود

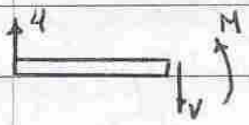
مثال ۵: مطلوبست رسم دیاگرام‌های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی.



$\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -3\times 2\times \frac{3}{2} - 3\times 1 = -6 B_y$

$\Rightarrow B_y = 2$

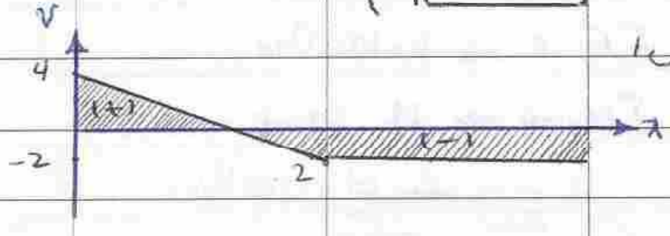


$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 4$

برش ۱:
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V = 4 - 2x \; t$

$\Sigma M = 0 \rightarrow -4x + (2\times x)\frac{x}{2} + M$

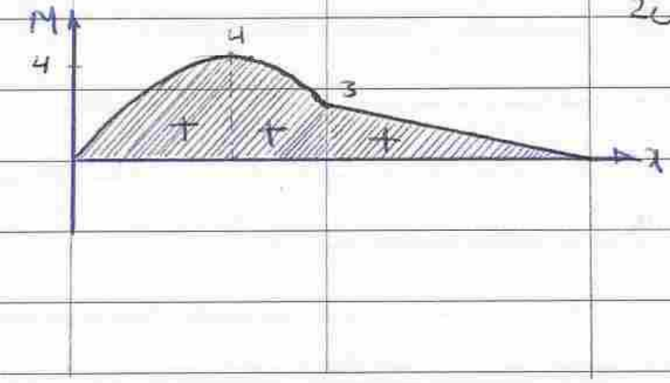
$\Rightarrow M = 4x - x^2 \; t.m$



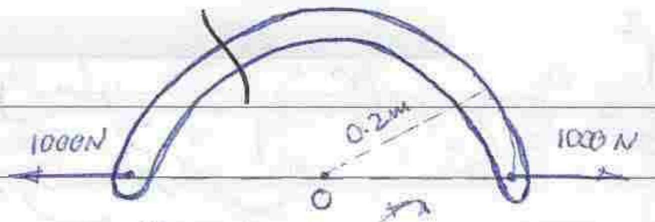
برش ۲:
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V = -2$

$\Sigma M = 0 \rightarrow 2(6-x) - 1(6-x) - M = 0$

$\Rightarrow M = -x + 6$

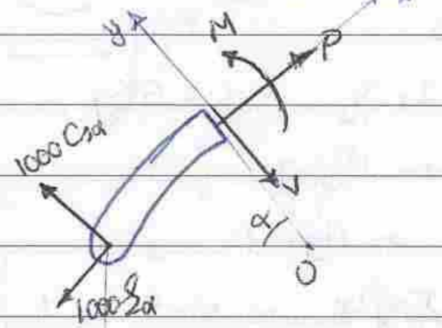


* در مورد لنگرهای گسترده الزاماً باید از روش مقطع زدن استفاده شود، از روش جمع زدن نمی‌توان استفاده کرد.



مثال: تیر خمیده نشان داده شده به شکل نیم دایره فرض است. مطلوبست تعیین معادلات تغییرات نیروهای محوری، برشی و لنگر خمشی در طول و رسم نمودارهای آن ها.

برشی را در زاویه α می‌زنیم.

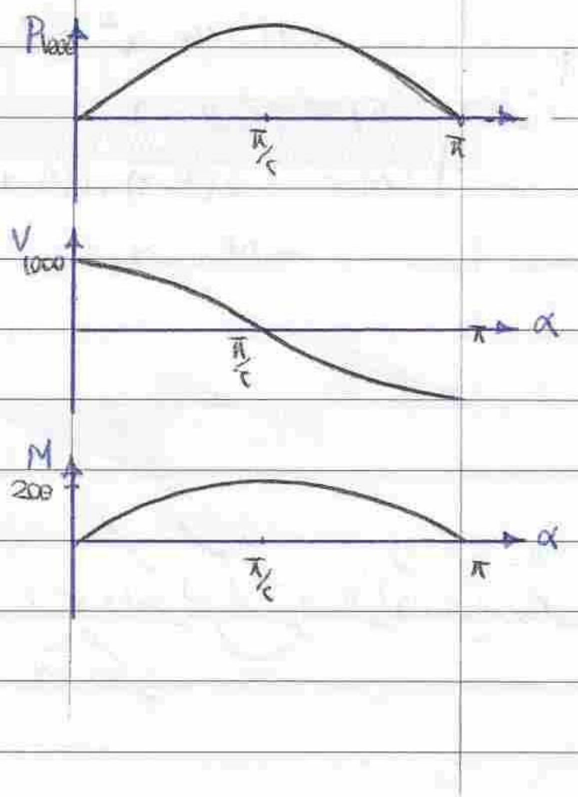


$\sum F_x = 0 \Rightarrow P = 1000\, S_\alpha$

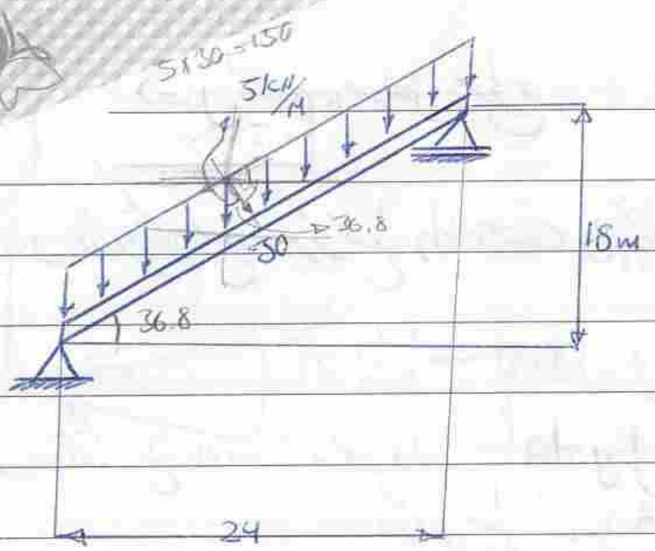
$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = 1000\, C_\alpha$

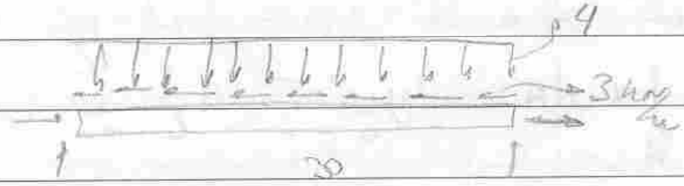
$\sum M_O = 0 \Rightarrow M - Pr = 0$

$\Rightarrow M = 200\, S_\alpha$



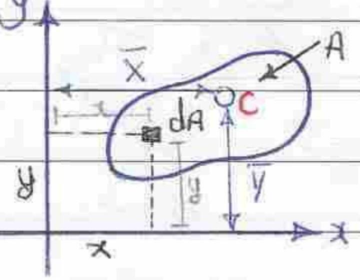
مثال ۵ نمودارهای تغییرات نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی را رسم کنید.





فصل پنجم: خواص سطوح

۱) ممان استاتیک سطح و مرکز سطح (static moment of area & Centroid):



$(x, y) \rightarrow$ مرکز المان

$S_x = \int_A y \cdot dA$ ممان استاتیک سطح A نسبت به محور x ها

$A \rightarrow$ انتگرال سطح

$S_y = \int_A x \cdot dA$ ممان استاتیک سطح A نسبت به محور y ها

$$S_x = \int y \cdot dA = A\bar{y} \qquad \bar{y} = \frac{\int y \cdot dA}{A}$$

$$\Rightarrow \qquad C \left| \begin{matrix} \bar{X} \\ \bar{y} \end{matrix} \right. \rightarrow \text{مرکز سطح}$$

$$S_y = \int x \cdot dA = A\bar{X} \qquad \bar{X} = \frac{\int x \cdot dA}{A}$$

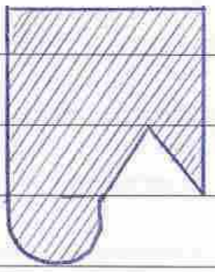
۱) واحد ممان استاتیک سطح cm^3 است.

۲) ممان استاتیک می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر باشد (بر حسب موقعیتش نسبت به محور مختصات شکل دارد)

۳) ممان استاتیک سطح نسبت به هر محوری که مرکز سطح آن از آن محور بگذرد صفر است.

۴) اگر سطحی دارای محور تقارن باشد مرکز سطح آن حتماً روی محور تقارن است.

۵) اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح آن محل تقاطع دو محور تقارن است.

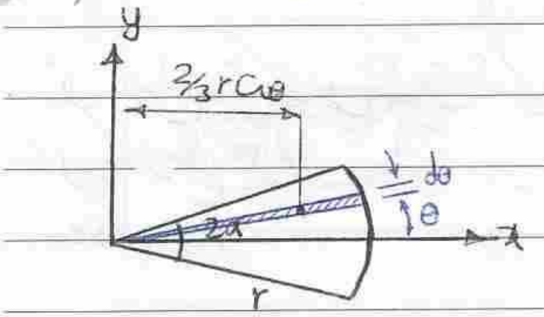


$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{xi} = \sum_{i=1}^{n} (A_i \cdot \bar{y}_i)$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{yi} = \sum_{i=1}^{n} (A_i \cdot \bar{X}_i)$$

$$\text{مرکز سطح } C \left| \begin{matrix} \frac{\int x dA}{A} \\ \\ \frac{\int y dA}{A} \end{matrix} \right.$$

مثال: مطلوبست تعیین محل مرکز سطح یک قطاع دایره به شعاع R و زاویه مرکزی 2α.



$$\bar{X} = \frac{S_y}{A} = \frac{\int x\,dA}{A}$$

مساحت قطاع: $\frac{1}{2}\beta r^2$

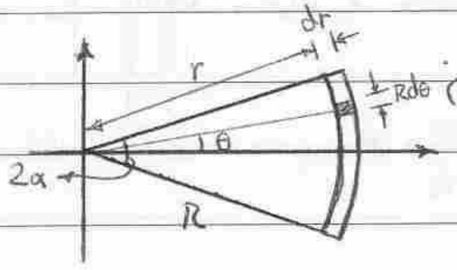
$$\begin{cases} dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \\ x = \frac{2}{3} r\cos\theta \end{cases}$$

$$\bar{X} = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\Rightarrow S_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{2}{3} r\cos\theta\right) \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{2}{3} r^3 \sin\alpha \rightarrow X = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin\alpha}{\frac{1}{2}(2\alpha) r^2} = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$$

مثال: مثال فوق را با استفاده از المان قوسی مجدداً حل کنید و نتیجه را با هم مقایسه کنید.

توضیح: ابتدا مرکز یک کمان دایره به شعاع R و زاویه مرکزی 2α را بدست آورده و سپس محل مرکز المان را بدست می‌آید.

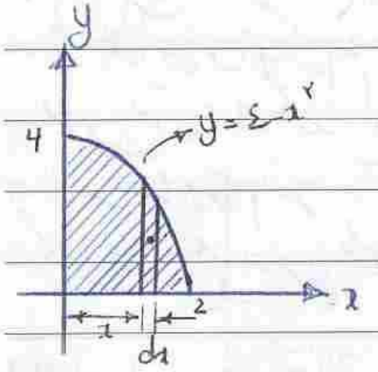


$$\frac{1}{r} R\,d\theta \qquad \text{کمان}\; X = \frac{\int x\,dl}{l} = \frac{\int r\cos\theta (r\,d\theta)}{2r\alpha} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\theta\,d\theta}{2\alpha}$$

$$= \frac{r}{2\alpha}(\sin\alpha)_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{r}{\alpha}\sin\alpha$$

$$\bar{X} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\int_0^R \frac{r}{\alpha}\sin\alpha\,(2r\alpha)\,dr}{\alpha R^2} = \frac{\int_0^R \sin\alpha\,(2r^2)\,dr}{\alpha R^2} = \frac{2\sin\alpha}{\alpha R^2}\int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{\alpha R^2}\left(\frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$



مثال: مطلوبست تعیین مرکز سطح محصور بین منحنی $y = 4 - x^2$ و محورهای x و y در ربع اول مختصات.

$$\bar{X} = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = \int x\,dA = \int_0^2 x(4 - x^2)\,dx = 4\ \text{cm}^3$$

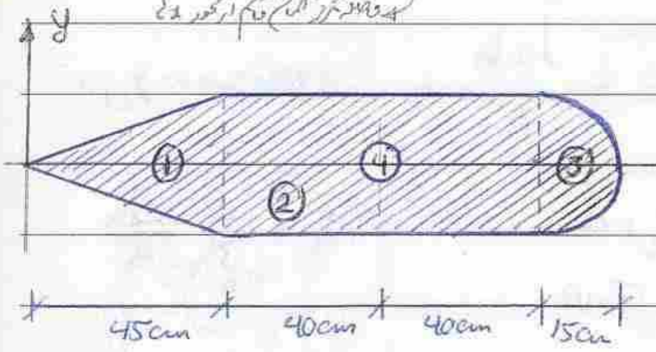
$$A = \int_A dA = 5.33\ \text{cm}^3 \rightarrow A = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} dy\,dx$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{4}{5.33} = 0.75$$

1) $S_x = \int y\,dA = \int_0^2 (4-x^2)(x)(-2x) = 8.53$ مختصات ←

2) $S_x = \int y\,dA = \int_0^2 \left(\frac{4-x^2}{2}\right)(4-x^2)\,dx = 8.53\ cm^3 \quad , \bar{y} = 1.66$ ← المان قائم است

به فاصله مرکز المان قائم از محور x ها



مثال: مقطع یک تیر مطابق شکل می‌باشد محل مرکز سطح آن را بدست آورید. شعاع سوراخ 5cm می‌باشد.

شماره سطح	A_i	$\bar{X}_i$	$A_i \cdot \bar{X}_i$
مثلث (1)	675	30	20250
مستطیل (2)	2400	85	20400
نیم‌دایره (3)	$\frac{\pi}{2} \times 15 = 353.4$	$\frac{4r}{3\pi} + 125 = 131.4$	46437
4	-78.5	85	-6672

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \bar{X}_i = 264015$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 3350$$

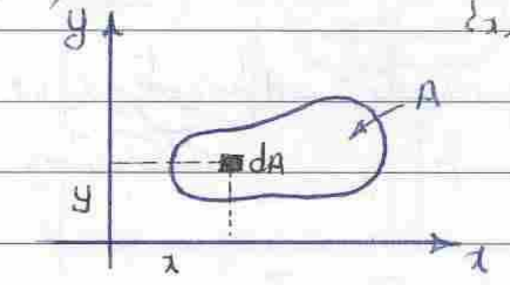
$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_1^n A_i X_i}{\sum_1^n A_i} = 78.8\ cm^3$$

* برای بدست آوردن مرکز سطح اشکالی که از ترکیب چند شکل هندسی مشخص بوجود آمده‌اند به شکل زیر عمل می‌کنیم:

برای یافتن x مرکز سطح در ابتدا مساحت هر شکل و x مرکز سطح آن را بدست آورده سپس هر دو را در هم ضرب می‌نماییم. سپس تمام $A_i X_i$ ها را با هم جمع می‌کنیم و تقسیم بر مساحت کل می‌نماییم. به این طریق $\bar{x}$ مرکز سطح بدست می‌آید.

مستطیل $\bar{I} = \frac{bh^3}{12}$ مثلث $\bar{I} = \frac{bh^3}{36}$ دایره $\bar{I} = \frac{\pi}{4} R^4$ (شعاع R)

۲) ممان اینرسی سطح (Area Moment of Inertia):

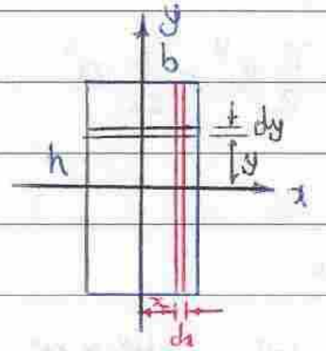


(فاصله المان از محور x ها)

$I_{xx}=\int y^2 . dA$ ممان اینرسی سطح A نسبت به محور x ها

$I_{yy}=\int x^2 . dA$ ممان اینرسی سطح A نسبت به محور y ها

* ممان اینرسی هیچگاه منفی و صفر نمی‌شود.



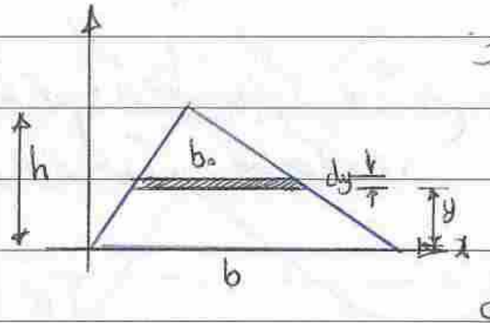
مثال۱: ممان اینرسی مستطیل را حول محورهای تقارن آن بدست آورید.

$$I_{xx}=\int_A y^2 dA=\int_{-h/2}^{h/2} y^2 . b\,dy=\frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy}=\int_A x^2 dA=\int_{-b/2}^{b/2} x^2 h\,dx=\frac{hb^3}{12}$$

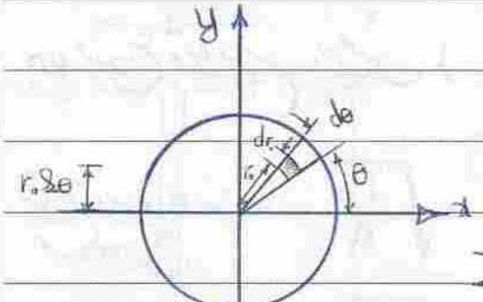
راستایی که در المان حرکت می‌کند توان 3 دارد.

مثال۲: ممان اینرسی مثلث را حول قاعده آن بدست آورید.



$$I_{xx}=\int_A y^2 dA=\int_0^h y^2 . \frac{b}{h}(h-y)\,dy=\frac{bh^3}{12}$$

$$dA=b_0 . dy=\frac{b}{h}(h-y)dy$$



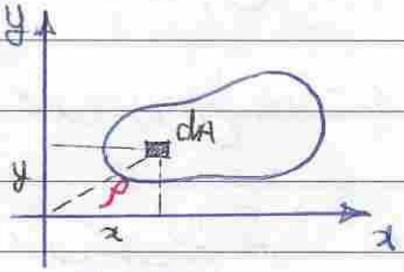
مثال۳: ممان اینرسی دایره را نسبت به قطر آن بدست آورید.

المانی در موقعیت زاویه‌ای θ و تغییرات زاویه‌ای dθ و در موقعیت شعاعی r_0 با تغییرات شعاعی dr_0.

$$I_{xx}=\int_A y^2 dA=\int_0^R\int_0^{2\pi}(r_0 S\theta)^2 r_0\, d\theta\, dr_0=\frac{\pi}{4}R^4$$

$$\longrightarrow I=\frac{\pi}{4}R^4$$

۳) ممان اینرسی قطبی (Polar Moment of Inertia):



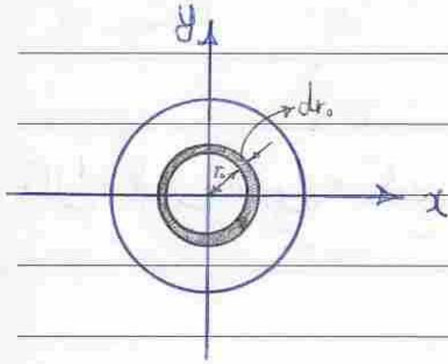
ممان اینرسی قطبی سطح A نسبت به محورهای xy یا نسبت به نقطه O:

$$J=\int_A \rho^2 \, dA$$

$$\rho^2=x^2+y^2 \Rightarrow J=\int_A (x^2+y^2)\,dA \Rightarrow J=I_{xx}+I_{yy}$$

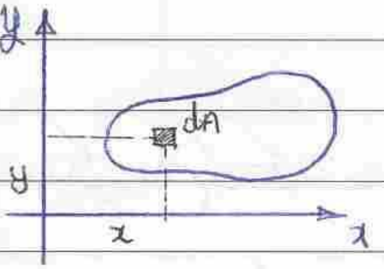
* از ممان های اینرسی سطح (I_x , I_y) می توان ممان اینرسی قطبی را بدست آورد.

مثال: ممان اینرسی قطبی دایره را نسبت به مرکز آن بدست آورید.



$$J=\int \rho^2 \, dA = \int_0^R r_0^2 \, 2\pi r_0 \, dr_0 = \frac{\pi}{2}R^4 = \frac{\pi}{32}D^4$$

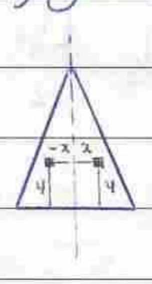
۴) حاصلضرب اینرسی (product of Inertia):



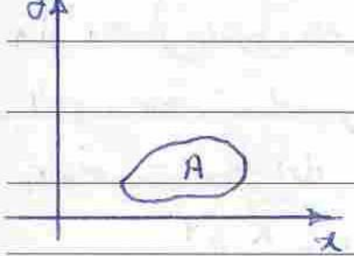
حاصلضرب اینرسی سطح A نسبت به دستگاه xy:

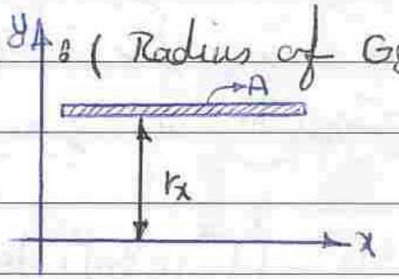
$$I_{xy}=\int_A xy \, dA$$

* نکته مهم: اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد حاصلضرب اینرسی آن سطح نسبت به دستگاه متشکل از آن محور و هر محور عمود بر آن صفر خواهد بود.



۵) شعاع ژیراسیون یا چرخش (Radius of Gyration):





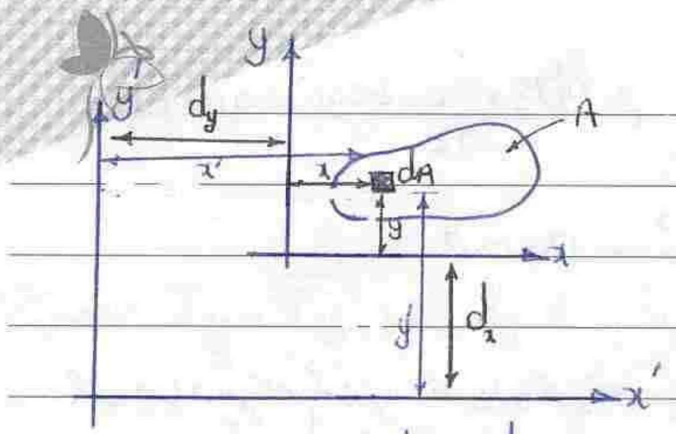
شعاع ژیراسیون A نسبت به محور x ها:

$$r_x=\sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}$$

I_{xx} $\quad r_x^2 \cdot A$

$$r_y=\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \qquad r_0=\sqrt{\frac{J}{A}}$$

۶) انتقال محورهای مختصات :



$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y + d_x)^2 dA$$

$$\Rightarrow I_{x'} = I_x + d_x^2 . A + 2 d_x S_x$$

رابطه انتقال محورهای مختصات نسبت به محور x . (d_x به d اشاره دارد)

حالت خاص : وقتی که محور x از مرکز سطح A بگذرد :

$$I_{x'} = \bar{I}_x + d_x^2 . A$$

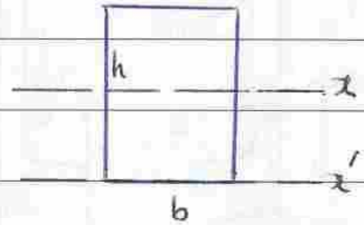
($\bar{I}_x$: ممان اینرسی سطح نسبت به محوری که از مرکز سطح گذشته باشد)

این رابطه برای I_y هم وجود دارد. بنابراین رابطه کلی به شکل زیر است :

$$I = \bar{I} + d^2 . A$$

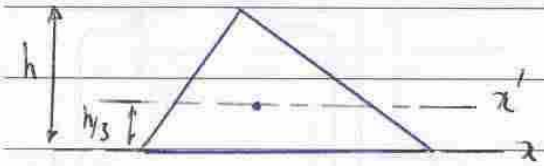
* بنابراین ممان اینرسی سطح نسبت به محوری که از مرکز سطح گذشته باشد کمترین مقدار را دارد.

مثال ۱ : ممان اینرسی مستطیل را نسبت به ضلع آن حساب کنید.



$$I = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 (bh) = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{3}$$

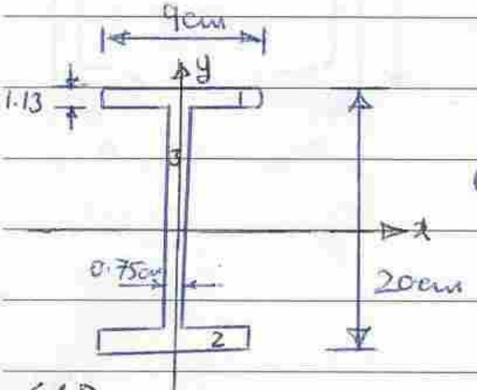
مثال ۲ : ممان اینرسی مثلث را نسبت به محوری به موازات قاعده و گذرا بر مرکز سطح مثلث بیابید.



$$\frac{bh^3}{12} = \bar{I} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left(\tfrac{1}{2} bh\right)$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \frac{bh^3}{36} \Rightarrow \bar{I}_{\text{مثلث}} = \frac{bh^3}{36}$$

مثال ۳ : مقطع یک ترکیب بارهای وارده از نوع INP200 با مشخصات مطابق شکل در نظر گرفته شده است. ممان‌های اینرسی این مقطع را حول محورهای تقارن آن محاسبه نمایید.

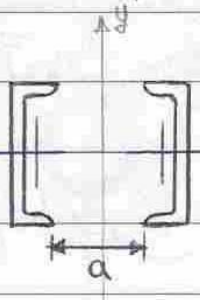


$$I_x = \left[\frac{9\times1.13^3}{12} + \left(10-\frac{1.13}{2}\right)^2 \times 9\times1.13\right]\times 2 + \frac{0.75\times(20-2.26)^3}{12} = 2162\ cm^4$$

$$I_y = \left[\frac{1.13\times9^3}{12}\right]\times 2 + \frac{(20-2.26)\times0.75^3}{12} = 138\ cm^4$$

محور x را در تیرآهن محور قوی و محور y را محور ضعیف گویند چون ممان اینرسی محور x خیلی بیشتر است.

* عضو ۱ و ۲ را بال تیرآهن (flange) گویند و عضو ۳ را جان تیرآهن (web) می‌گویند.

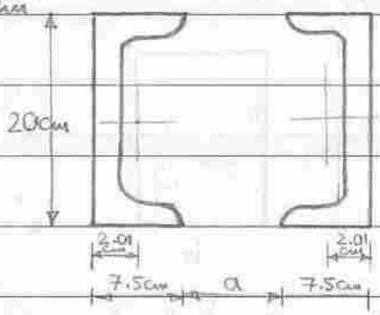


مثال: مقطع مرکب از دو ناودانی تحت بار فشاری مطابق شکل در نظر گرفته شده است. فاصله a را برای موارد زیر طوری بیابید که ممان‌های اینرسی نسبت به محورهای تقارن مقطع با هم برابر باشند.

الف) ناودانی‌ها نمره 20 باشند.

ب) ناودانی‌ها نمره 30 باشند.

الف) $[200 \rightarrow \bar{I}_x = 1910\ cm^4 \quad \bar{I}_y = 148\ cm^4,\ A = 32.2\ cm^2$



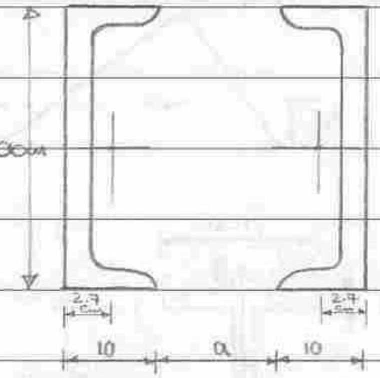
$I_x = 2(1910)$

$I_y = (\bar{I}_y + d^2.A)2 = 2\left(148 + \left(\frac{a}{2}+5.49\right)^2 32.2\right)$

$I_y = I_x \rightarrow 2(1910) = 2\left(148 + \left(\frac{a}{2}+5.49\right)^2 32.2\right)$

$\Rightarrow a = 3.81\ cm$

ب) $[300 \rightarrow \bar{I}_x = 8030\ cm^4 \quad \bar{I}_y = 495\ cm^4$



$I_x = 2(8030) \qquad A = 58.8\ cm^2$

$I_y = 2(\bar{I}_y + d^2.A)$

$I_y = I_x \rightarrow 2(8030) = 2\left(495 + \left(\frac{a}{2}+7.3\right)^2 58.8\right)$

$\Rightarrow a = 8.04\ cm$

ممان اینرسی قطبی $J = \bar{J} + d^2 . A$

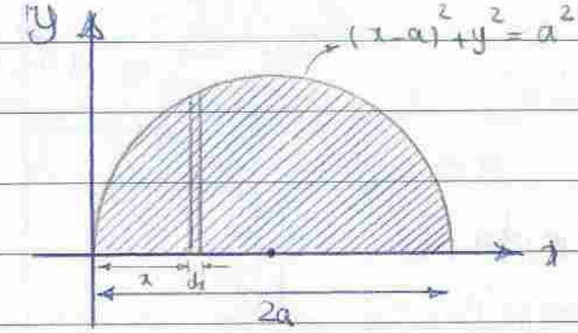
$\bar{J}$: ممان اینرسی سطح نسبت به دستگاهی که مبدأ آن مرکز سطح باشد.

d: فاصله بین مبدأ دستگاه قدیم و دستگاه جدید.

حاصلضرب اینرسی $I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A$

$\bar{I}_{xy}$: حاصلضرب اینرسی سطح A نسبت به دستگاهی که مبدأ آن مرکز سطح باشد.

← اینجا علامت d_x و d_y مهم است.



مثال: حاصلضرب اینرسی سطح هاشورخورده را نسبت به دستگاه xy به دو روش زیر محاسبه نمایید.

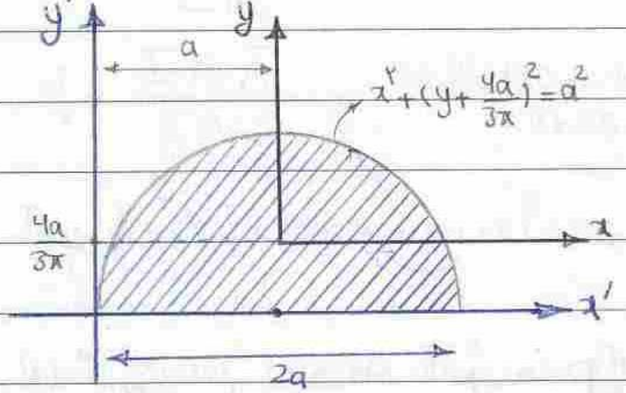
۱) انتگرال‌گیری مستقیم $\int xy\,dA$

۲) رابطه انتقال محورهای مختصات.

$$1)\ I_{xy} = \int xy\,dA = \int_0^{2a} \frac{1}{2}x\left(\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)\left(\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx = \int_0^{2a} x\left(a^2-(x-a)^2\right)dx$$

$$= \int_0^{2a} x\left(a-(x-a)\right)\left(a+(x-a)\right)dx = \int_0^{2a} x(2a-x)(x)\,dx = \int_0^{2a}\left(2ax^2-x^3\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}2ax^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^{2a} = \frac{2}{3}a(8a^3) - \frac{1}{4}(16a^4) = \frac{16}{3}a^4 - \frac{16}{4}a^4 = \frac{4}{3}a^4 \times \frac{1}{2}$$



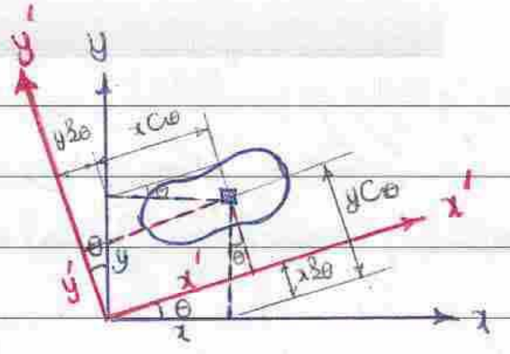
$\bar{I}_{xy} = 0$ حاصلضرب اینرسی سطح نسبت به دستگاهی شامل محور تقارن و هر محور عمود بر آن صفر است.

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A$$

$$I_{xy} = 0 + \frac{4a}{3\pi} \times a \times \pi a^2 \times \frac{1}{2}$$

$$I_{xy} = \frac{4}{3}a^4 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}a^4$$

۱۷) چرخش محورهای مختصات :



$$I_{x'} = \int_A y'^2 \, dA \qquad I_{y'} = \int_A x'^2 \, dA$$

$$I_{x'y'} = \int x' . y' \, dA$$

قرارداد : θ زمانی مثبت است که دوران در جهت مثلثاتی باشد.

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y C\theta - x S\theta)^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (y S\theta + x C\theta)^2 dA$$

$$I_{x'y'} = \int x' . y' dA = \int (y C\theta - x S\theta)(y S\theta + x C\theta) dA$$

$$\begin{cases} I_{x'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \dfrac{I_x - I_y}{2} C2\theta - I_{xy} S2\theta \\ I_{y'} = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \dfrac{I_x - I_y}{2} C2\theta + I_{xy} S2\theta \\ I_{x'y'} = \dfrac{I_x - I_y}{2} S2\theta + I_{xy} C2\theta \end{cases}$$

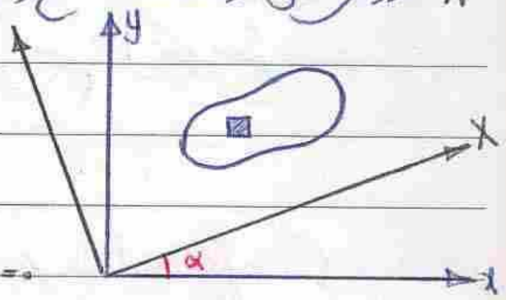
$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = Const \longrightarrow$ چون مبدأ مختصات تغییر نکند.

۱۸) محورهای اصلی (Principal Axes) :

محورهایی هستند حول آنها اینرسی سطح نسبت به یکی از آنها Max و نسبت به دیگری Min است.
(مثلاً اگر $I_{x'}$ ، Max باشد $I_{y'}$ حتماً Min است)
این در حالتی اتفاق می‌افتد که زاویه دوران α باشد. برای پیدا کردن α از مشتق استفاده می‌کنیم.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -(I_x - I_y) S2\theta - 2 I_{xy} C2\theta = 0 \Rightarrow tg2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

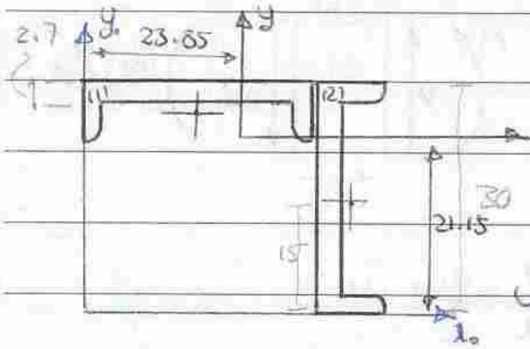
* محورهای اصلی در مقاومت مصالح و طراحی سازه‌ها کاربرد دارد



$$I_{\substack{Max\\Min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{xy} = 0 \xrightarrow{tg 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}} I_{xy} = \frac{I_x - I_y}{2} S_{2\theta} + I_{xy} C_{2\theta} = 0$$

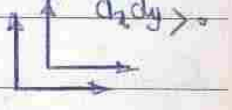
* اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد این محور، محور اصلی است ، چون $I_{xy} = 0$.



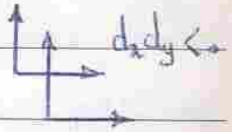
مثال: مقطع یک عضو فشاری از دو عدد ناودانی 300 مطابق شکل تشکیل شده است. مطلوبست

الف) تعیین محل محورهای اصلی مرکزی

ب) تعیین ممان های اینرسی حداکثر و حداقل نسبت به محورهای اصلی مرکزی



$$\bar{X}_0 = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{58.8 \times 15 + 56.8 (30 + 2.7)}{2 \times 58.8} = 23.85$$



$$\bar{Y}_0 = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{58.8 \times (30 - 2.7) + 58.8 \times 15}{2 \times 58.8} = 21.15$$

$$I_x = \left[495 + (30 - 2.7 - 21.15)^2 \times 58.8\right] + \left[8030 + (21.15 - 15)^2 \times 58.8\right] = 12973 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \left[8030 + (23.8 - 15)^2 \times 58.8\right] + \left[495 + (32.7 - 23.8)^2 \times 58.8\right] = 17736 \text{ cm}^4$$

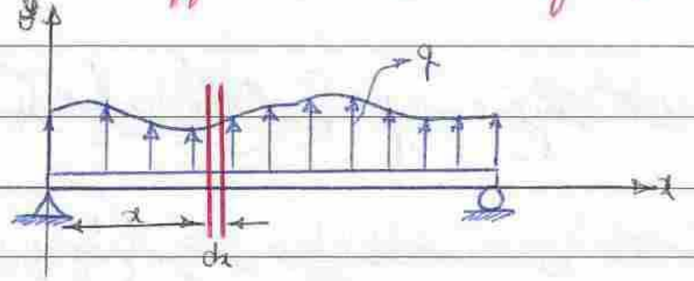
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x . d_y . A = \left[[0] + (-(27.3 - 21.15))(23.85 - 15) \times 58.8\right]$$
$$+ \left[0 + (6.15)(-8.85) \times 58.8\right] = -64.01$$

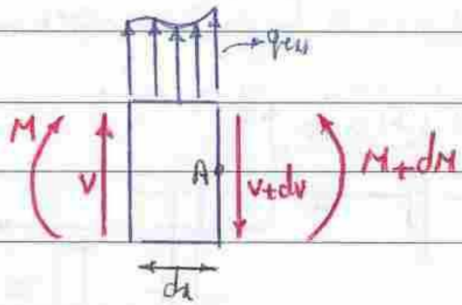
$$tg 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} = \quad \Rightarrow \alpha = -34.8$$

$I_{max} = 22184 \qquad I_{min} = 8524$

پس این است دستگاه محور اصلی داریم. حالا چون شکلی به دستگاه مختصات اولیه و مکان این
دارد. دستگاه محور اصلی مرکزی دستگاهی است که در دستگاه اولیه آن محل مرکز سطح باشد.

معادلات دیفرانسیل تعادل (Differential equation of equilibrium)





$$\sum F_y=0 \Rightarrow V+q(x).dx-(V+dV)=0 \Rightarrow \frac{dV}{dx}=q(x) \quad (1)$$

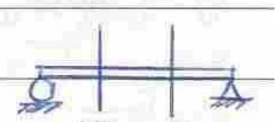
$$\sum M_A=0 \Rightarrow M+dM-M-V.dx-q(x).dx\left(\frac{dx}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{dM}{dx}=V \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2}=q(x) \quad (3)$$

(1)، (2)، (3) را معادلات دیفرانسیل تعادل برای نیروهای داخلی گویند.

رسم دیاگرام نیروهای داخلی تیر با استفاده از روش جمع زدن: (Summation Method)

$$(1) \text{ معادله } \rightarrow dV=q(x)dx \Rightarrow \int_{(1)}^{(2)} dV=\int_{(1)}^{(2)} q(x)dx \Rightarrow$$



$$\Rightarrow V_2-V_1=\int_{(1)}^{(2)} q(x)dx \quad (4)$$

$$(2) \text{ معادله } \rightarrow dM=V.dx \Rightarrow \int_{(1)}^{(2)} dM=\int_{(1)}^{(2)} V.dx$$

$$\Rightarrow M_2-M_1=\int_{(1)}^{(2)} V.dx \quad (5)$$

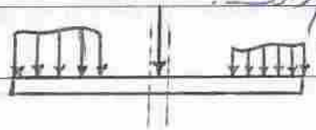
نتایج حاصل از معادلات ۱ و ٤ :

۱) شیب منحنی تغییرات نیروی برشی (V) در هر نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه.

۲) تغییرات نیروی برشی بین هر دو مقطع دلخواه (V_2-V_1) برابر است با جمع جبری نیروهای خارجی بین آن دو مقطع.

۳) اگر بین دو مقطع هیچ نیرویی وارد نشود تغییرات نیروی برشی (V_2-V_1) بین آن دو مقطع صفر است و نیروی برشی در این بین ثابت است.

٤) اگر یک بار متمرکز وارد جمع جبری شود عمل پیوسته جمع زدن نیروهای خارجی اعتبار خود را بین دو مقطع مورد نظر حفظ می کند ولی در محل اعمال نیروی متمرکز یک انفصال در نیروی برشی خواهیم داشت.



(اندازه انفصال به اندازه نیروی متمرکز اعمال شده است)

نتایج حاصل از معادلات 2 و 5 :

۱) شیب منحنی تغییرات لنگر خمشی (M) در هر نقطه برابر است با مقدار نیروی برشی (V) در آن نقطه.

۲) تغییرات لنگر خمشی بین هر دو مقطع دلخواه (M_2-M_1) برابر است با جمع جبری سطوح زیر منحنی تغییرات نیروی برشی بین آن دو مقطع.

۳) نقاط Max و Min در دیاگرام لنگر خمشی در نقاطی اتفاق می افتد که نیروی برشی صفر باشد یا تغییر علامت دهد.

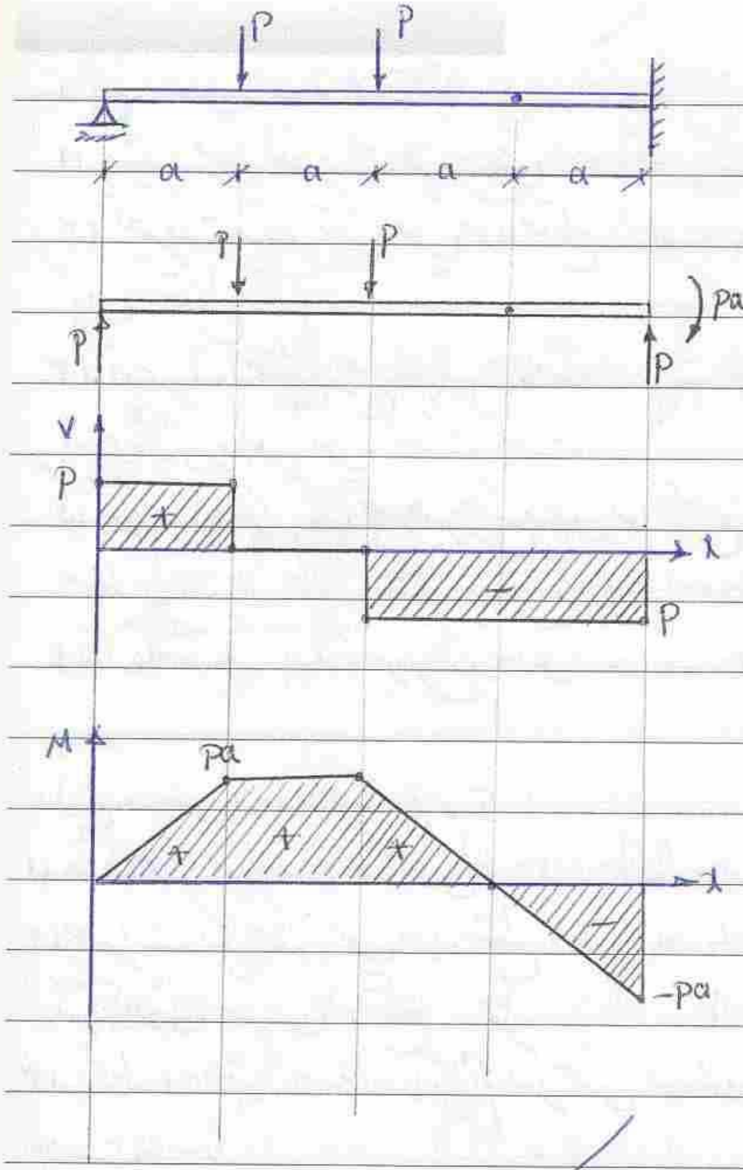
٤) اگر یک لنگر متمرکز خارجی بستر اعمال گردد عمل پیوسته جمع زدن سطوح زیر منحنی نیروی برشی برای رسم منحنی لنگر خمشی اعتبار خود را حفظ می کند ولی در محل لنگر خمشی یک **انفصال** رخ می دهد. در صورتیکه لنگر متمرکز خارجی موافق حرکت عقربه های ساعت باشد انفصال مذکور مثبت بوده در غیر اینصورت منفی است.

روش رسم دیاگرام ها :

به منظور رسم دیاگرام های نیروی برشی و لنگر خمشی از روش جمع زدن ، از ابتدای سمت چپ تیر (مبدأ x) شروع کرده و با جمع زدن نیروهای خارجی دیاگرام نیروی برشی و با جمع زدن سطوح زیر منحنی برشی دیاگرام لنگر خمشی را رسم می کنیم.

* مشتق دوم لنگر خمشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه (تقعر یا تحدب)
* مشتق نیروی برشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی خارجی (q) در همان نقطه (شیب)
* مشتق لنگر خمشی نسبت به x در یک نقطه برابر است با مقدار نیروی برشی (V) در همان نقطه (شیب)

مثال: مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر مفصلی داده شده با استفاده از روش جمع زدن



هنگام تکیه گاه غلتکی و مفصلی تیر نداریم مگر اینکه نیروی متمرکز داشته باشیم.

* در مفصل همواره لنگر خمشی صفر است.

۱) در مورد لنگرهای گسترده از الگا باید از روش مقطع زدن استفاده کنیم.

۲) حتماً علامت الحاق را دقیق رعایت کرد تا مشکلی در رسم دیاگرام نباشد.

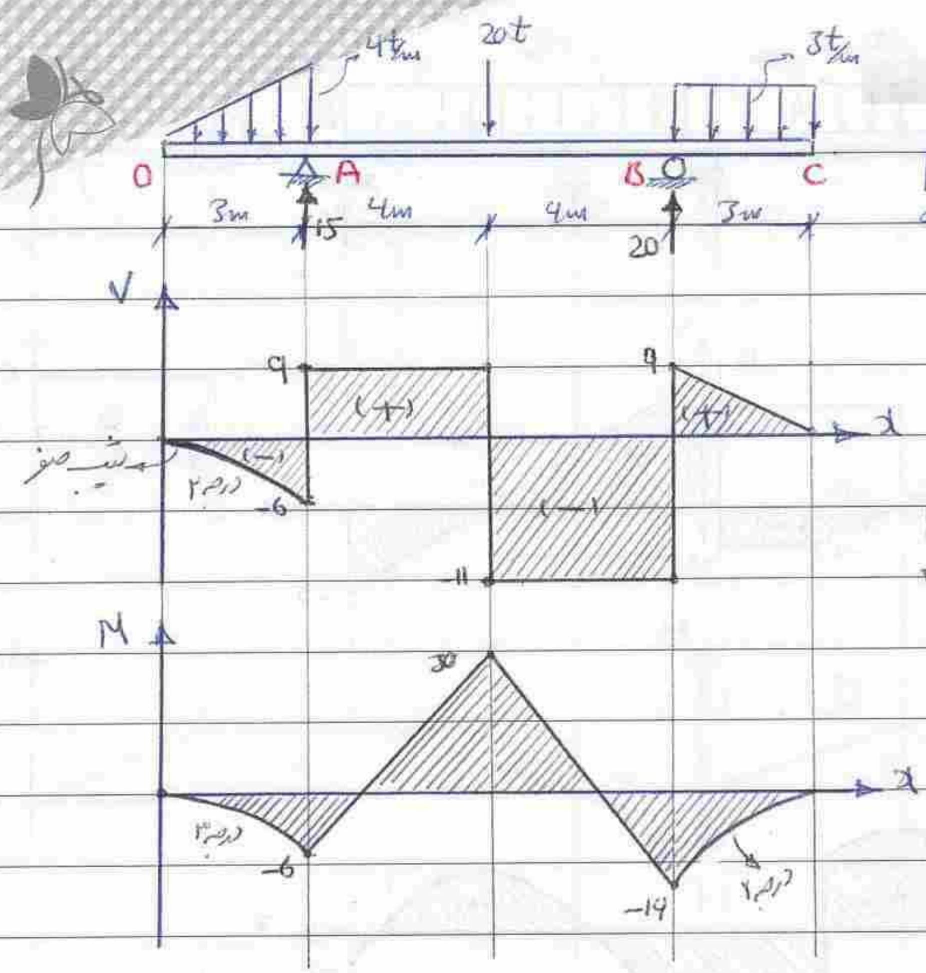
۳) در دیاگرام برشی در زیر محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره انفصال داریم. میزان انفصال هم به اندازه‌ی همان نیروی انفصالی است.

۴) در دیاگرام لنگر خمشی در محل اعمال نیروی متمرکز در تیر همواره شکستگی داریم.

۵) منحنی نیروی برشی مشتق منحنی لنگر خمشی است.

۶) در تکیه‌گاه‌های غلتکی و مفصلی در دو سر آزاد تیر (در ابتدا یا انتهای آزاد تیر) اگر لنگر متمرکز خارجی نداشته باشیم نیروی خمشی صفر است.

مثال ۲) مطلوبست رسم دیاگرام نیروی برشی لنگر خمشی تیر با استفاده از روش جمع زدن.

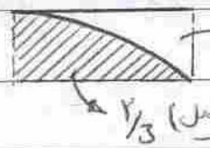


$$\begin{cases} V_2 - V_1 = \int q(x)\,dx \\ M_2 - M_1 = \int V(x)\,dx \\ \dfrac{d^2M}{dx^2} = q(x) \end{cases}$$

$\frac{1}{3}(3 \times 6) = 6$

* تکیه‌گاه مفصلی و غلتکی در ابتدا و انتهای آزاد دارای نیروی برشی صفر است. مگر اینکه لنگر متمرکز داشته باشیم (این مسئله برای لنگر خمشی هم صحیح است.)

* اگر منحنی درجه دو داشته باشیم که در انتهایش دارای شیب صفر باشد سطح زیر منحنی ۲/۳ مستطیل محیط بر آن است.

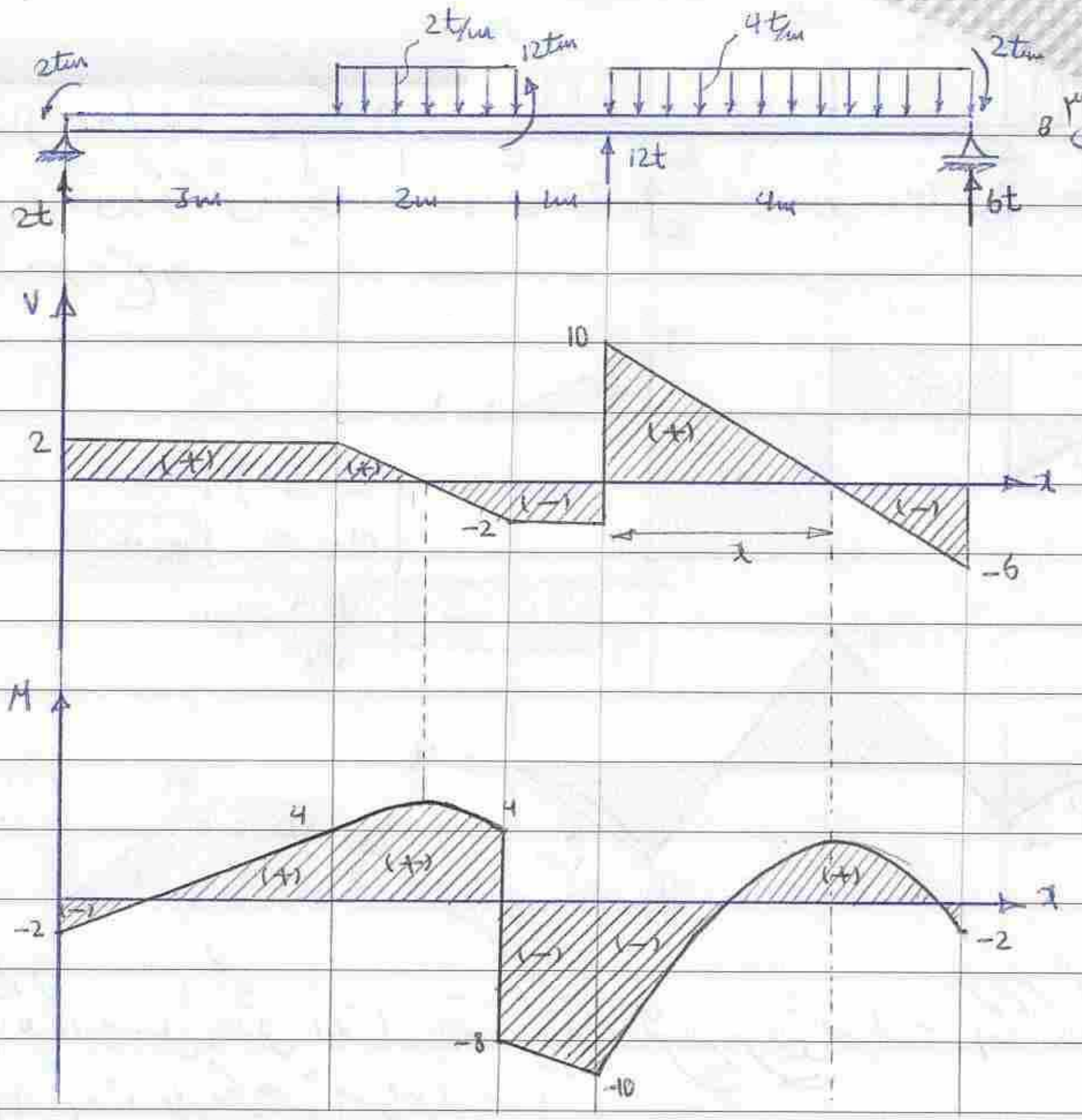


* اگر در ابتدا و انتهای تیر نیروی متمرکز نداشته باشیم نیروی برشی از نقطه صفر آغاز می‌شود.

* q در هر نقطه بین B و C ثابت است پس شیب خط نمودار برشی ثابت می‌ماند ولی چون q در هر نقطه بین O و A ثابت نیست پس شیب خط نمودار برشی ثابت نیست و منحنی وار است.

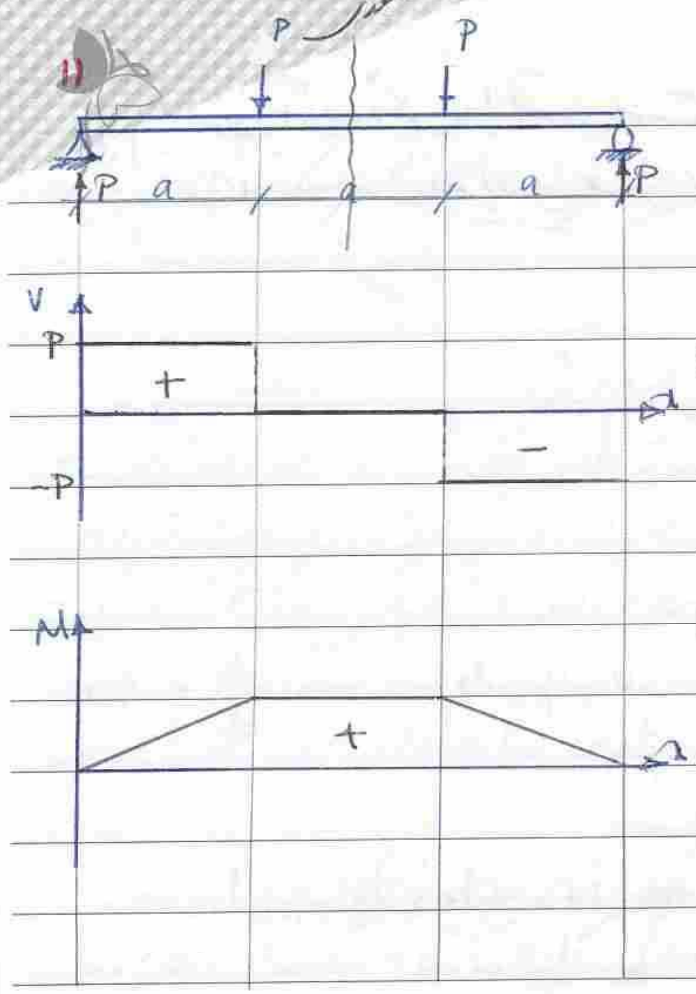
* اگر جهت بار گسترده q به سمت پایین باشد جهت تقعر M به سمت پایین است و اگر بار گسترده به سمت بالا باشد جهت تقعر M به سمت بالا است.

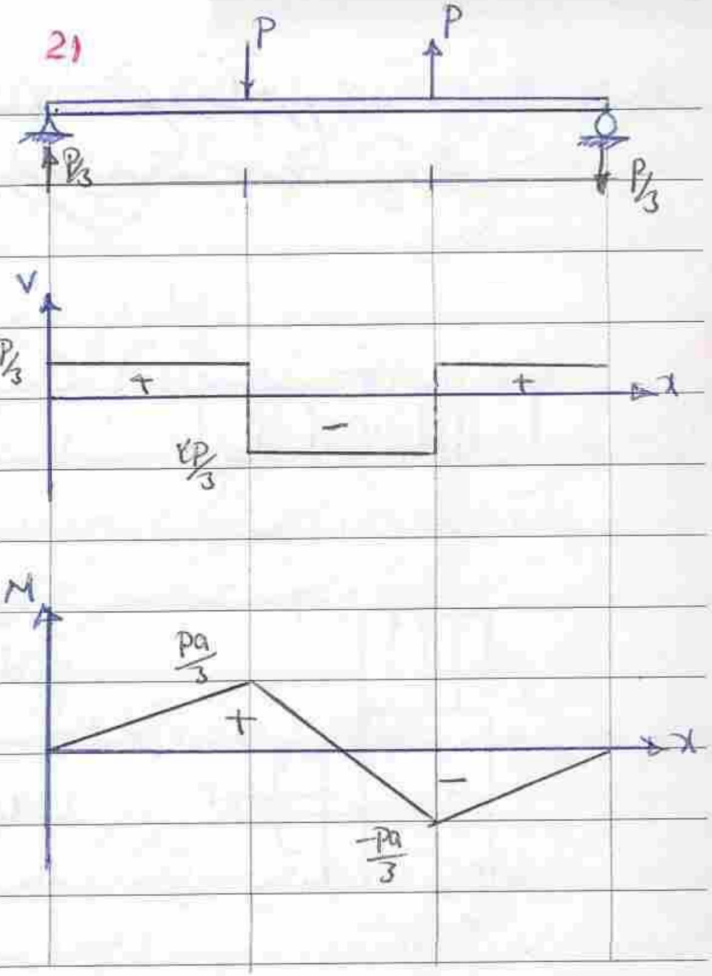
مثال ۳



$\frac{x}{4} = \frac{10}{16} \rightarrow x =$

* برای رسم نمودار لنگر خمشی در نقطه‌ای که لنگر متمرکز داریم می‌توانیم به راحتی از روش قطع زدن کمک بگیریم.



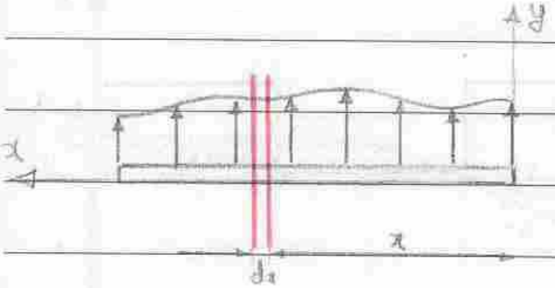


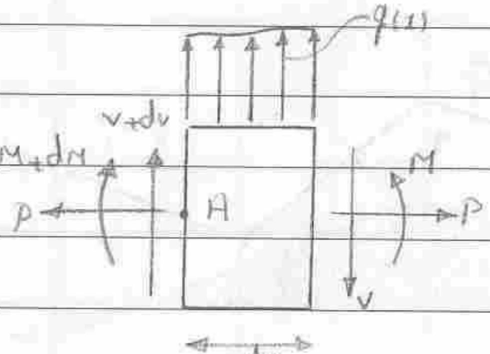
* تیر ۱ دارای تقارن محوری است و تیر ۲ دارای تقارن مرکزی است.

* وقتی تیر دارای تقارن محوری است، نمودار برش آن دارای تقارن مرکزی و نمودار لنگر خمشی آن دارای تقارن محوری است.

* وقتی تیر دارای تقارن مرکزی است، نمودار برش آن دارای تقارن محوری و نمودار لنگر خمشی آن دارای تقارن مرکزی است.

تمرین: اگر مبدأ محور x را انتهای سمت راست تیر در نظر بگیریم و جهت مثبت x به طرف چپ باشد، معادلات دیفرانسیل تعادل را بر اساس مختصات جدید بدست آورید.





$\sum F_y = 0$

$v + dv - v + q(x)\,dx = 0 \rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -q(x)$

$\sum M_A = 0$

$-M - dM + M - v\,dx + \dfrac{dx}{2}\left(q(x)\,dx\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{dM}{dx} = -v$

رسم منحنی ارتجاعی تیر (elastic curve)

تعریف: شکل تغییر یافته محور تیر را پس از اعمال نیروهای وارده منحنی تغییر شکل ارتجاعی تیر یا منحنی الاستیک تیر گویند.

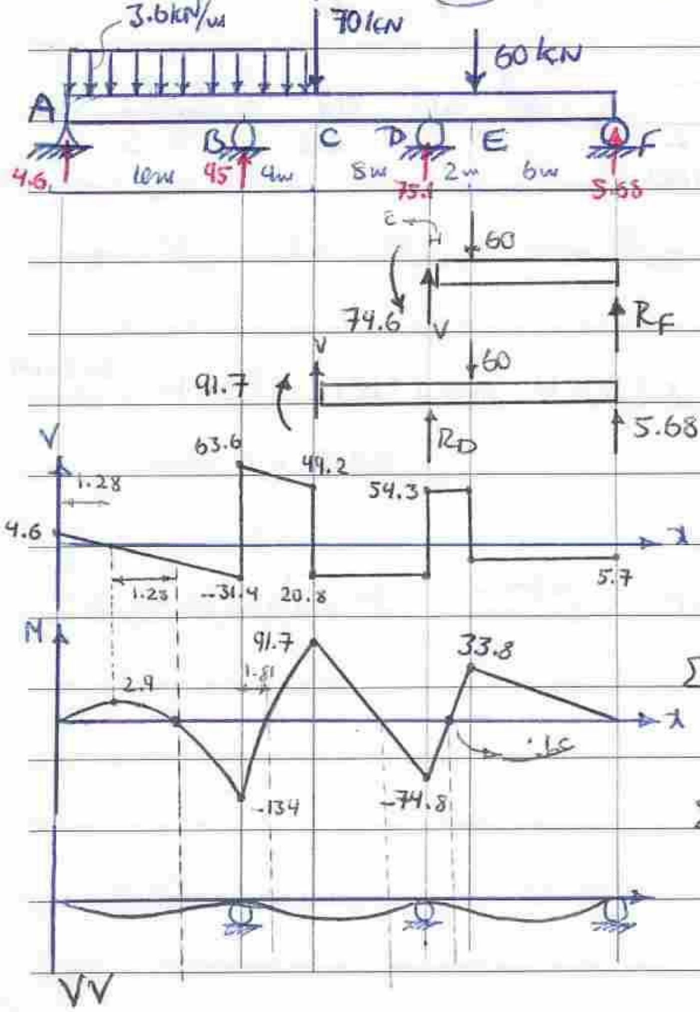
نکته ۱: منحنی ارتجاعی تیر با توجه به دیاگرام لنگر خمشی رسم می‌شود.

نکته ۲: در نواحی از تیر که لنگر خمشی مثبت است تیر دارای تقعر مثبت بوده و اصطلاحاً به صورت کاسه‌ای (تقعر به سمت بالا) تغییر شکل می‌دهد و در ناحیه‌هایی از تیر که لنگر خمشی منفی است تیر دارای تقعر منفی بوده و اصطلاحاً به صورت گنبدی تغییر شکل می‌دهد. در ناحیه‌ای که لنگر خمشی صفر است تیر تغییر شکل ندارد.

نکته ۳: نقاطی از تیر که تقعر تغییر می‌دهد نقطه عطف (Inflection point) و در جایی اتفاق می‌افتد که لنگر خمشی تغییر علامت دهد.

نکته ۴: در رسم منحنی ارتجاعی تیر باید توجه کرد که پیوستگی ارتجاعی تیر حفظ شود.

نکته ۵: در محل تکیه‌گاه‌های ثابت (مفصلی، غلتکی، گیردار ...) جابجایی و تغییر شکل تیر صفر است و همچنین در محل تکیه‌گاه گیردار شیب منحنی ارتجاعی صفر خواهد بود.



مثال: تیر نشان داده شده در شکل مفروض می‌باشد که تحت اثر بارهای گسترده و متمرکز نشان داده شده مفروض است. اگر از این تیر با روش‌های تحلیلی نشان داده است لنگر خمشی این تیر در مقطع C برابر با $+91.7\ KN.m$ و در مقطع D برابر با $-74.6\ KN.m$ می‌باشد. مطلوب است رسم دیاگرام‌های تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی و منحنی ارتجاعی.

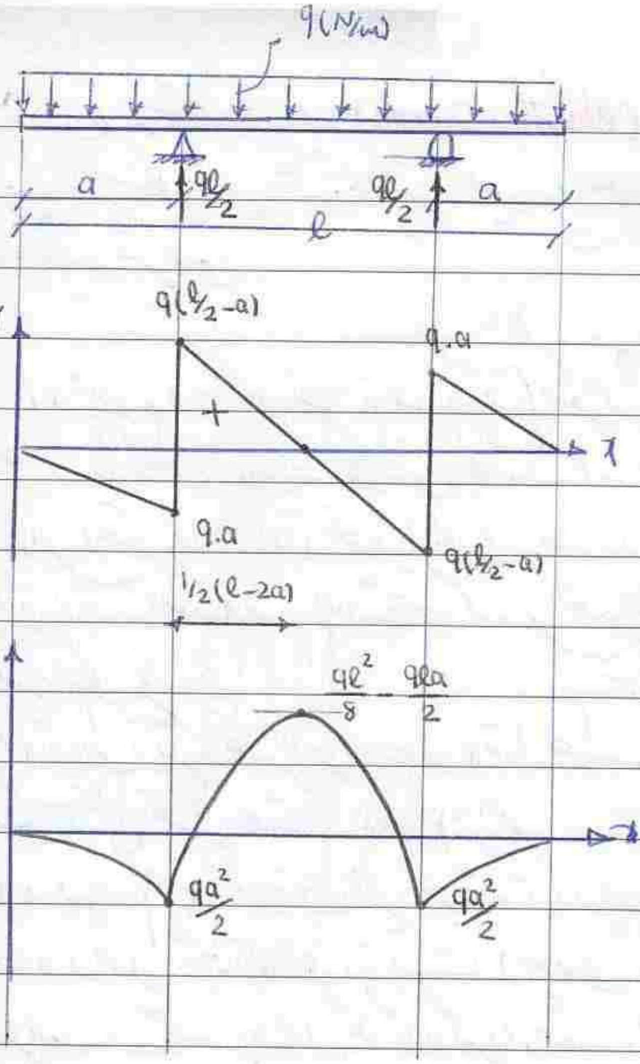
$$\Sigma M_D=0 \rightarrow R_F \times 8 - 60 \times 2 + 74.6 = 0$$

$$\rightarrow R_F = 5.68\ kN$$

$$\Sigma M_C=0 \rightarrow -91.7 + 8R_D - 600 + 16(5.68) = 0$$

$$\rightarrow R_D = 75.1\ kN$$

$R_A = 4.6\ kN$ $\quad$ $R_B = 95\ kN$



مثال) تیر شکل داده شده بار گسترده یکنواختی را تحمل می‌کند مطلوبست تعیین فواصل a برای موقعیت دو تکیه‌گاه بطوریکه لنگر خمشی Max کمتر به حداقل کاهش یابد و لنگر خمشی Max را بدست آورید. لنگر خمشی Max وقتی به حداقل می‌رسد که

$$|M_{max}^{(+)}| = |M_{max}^{(-)}|$$

$$\rightarrow a = 0.207l$$

$$M_2 - \left(-\frac{qa^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(l-2a)\,q\left(\frac{l}{2}-a\right)(1/2)$$

$$M_2 + \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}-a\right)^2$$

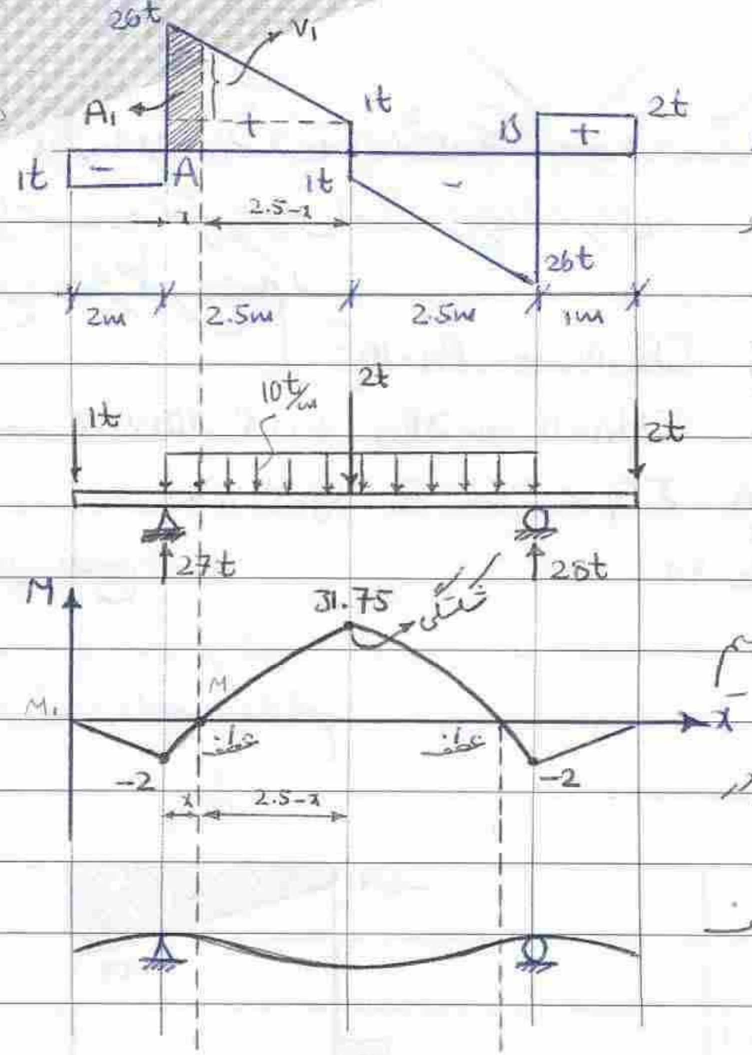
$$M_2 + \frac{qa^2}{2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - la + a^2\right)$$

$$M_2 + \frac{qa^2}{2} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} + \frac{qa^2}{2}$$

$$\rightarrow M_2 = \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2}$$

$$|Max^{(+)}| = |Max^{(-)}| \Rightarrow \frac{ql^2}{8} - \frac{qla}{2} = \frac{qa^2}{2} \rightarrow l^2 - 4la - 4a^2 = 0$$

$$\rightarrow l = 4.82a \rightarrow a = 0.207\,l$$



مثال: یک تیر ۸ متری در نقاط A و B به ترتیب دارای تکیه‌گاه‌های مفصلی و غلتکی می‌باشد. دیاگرام تغییرات نیروی برشی آن مطابق شکل می‌باشد. وضعیت بارگذاری تیر را مشخص نموده دیاگرام تغییرات لنگر خمشی را رسم نمایید.

برای اطمینان چند مورد را تعادل می‌نویسیم مخصوصاً ΣM.

* اگر $\Sigma M \neq 0$ یعنی احتمالا لنگر متمرکز در جایی از تیر وجود دارد.

* اگر $\Sigma M = 0$ شد امکان دارد دو لنگر مخالف داشته باشیم که راستی آزمایی شده باید ذکر کند.

$$\frac{2.5-x}{2.5} = \frac{V_1}{25}$$

برای یافتن نقطه عطف: $-2 + A_1 = 0$

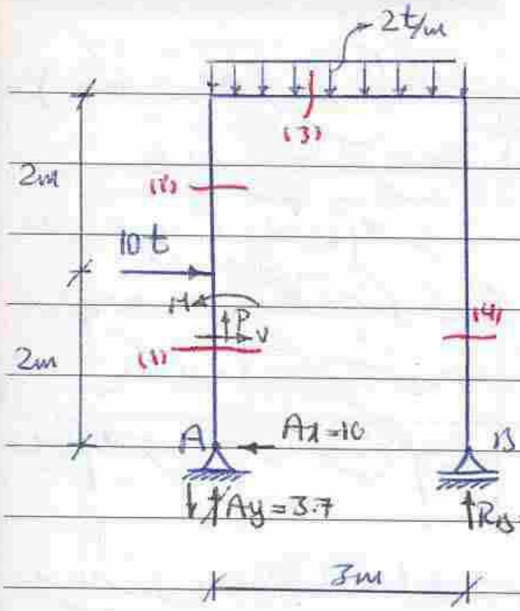
$$\Rightarrow V_1 = 25 - 10x \quad \Rightarrow A_1 = \frac{(26 + V_1 + 1) \times (x)}{2} = \frac{(26 + 26 - 10x)\,x}{2}$$

$$A_1 - 2 = 0 \Rightarrow 4 = (52 - 10x)\,x \Rightarrow 4 = 52x - 10x^2 \Rightarrow 10x^2 - 52x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.08$$

$$M = \int v\,dx + M_0 \xrightarrow{\text{نقطه عطف}} (M=0) \Rightarrow 0 = \int v\,dx + M_0 \xrightarrow{M_0 = 0} \int v\,dx = 0$$

مثال ٥: قاب نشان داده شده تحت بار گسترده یکنواخت و بار متمرکز مفروض است. نمودار نیروهای محوری، برشی و لنگر خمشی را رسم کنید.



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 10t$

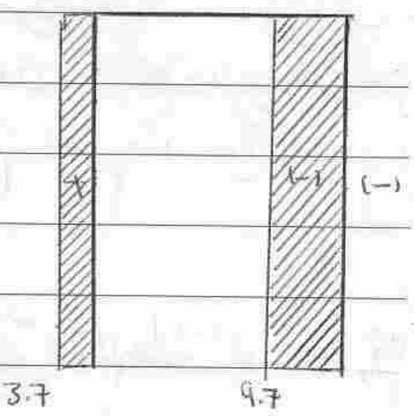
$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 3R_B - 6 \times 1.5 - 10 \times 2 = 0 \Rightarrow R_B = 9.7t$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R\ A_y = -3.7t$

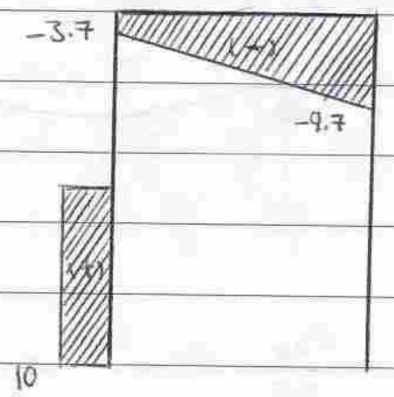
(جهت فرضی اصلاح شود)

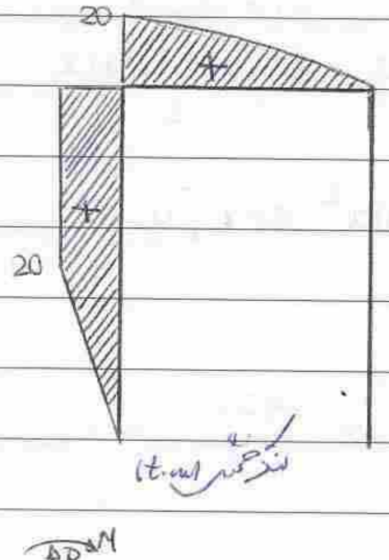
* از داخل قاب به اعضا نگاه می‌کنیم

نیروی محوری



نیروی برشی

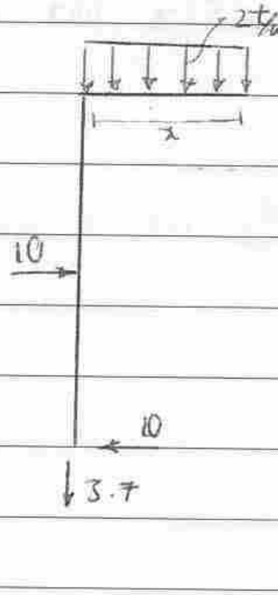




لنگر خمشی (t.m)

برش 1) $P = 3.7t \quad V = 10t \quad M = 10x$

برش 2) $P = 3.7t \quad V = 0 \quad M = 10x - (10x - 2)$

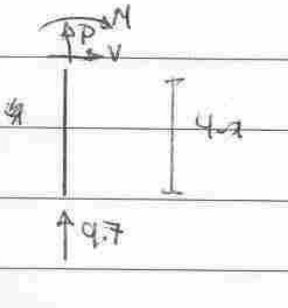


برش 3) $P = 0$

$V = -3.7 - 2x$

$M + 3.7x - 10 \times 4 + 10 \times 2 + x^2 = 0$

$\Rightarrow M = -x^2 - 3.7x + 20$



* در زندگی همین دو گنج که از یک عضو به عضو دیگر قدر لشکر برابر است .